Lemma 3.5 (Invariance of the row space). *Let A be an $m \times n$ matrix and M an invertible $m \times m$ matrix. Then A and MA have the same row space, $\mathbf{R}(A) = \mathbf{R}(MA)$.*

Def. row space $R(A)$ = column space of $A^T = C(A^T)$

Also müssen wir zeigen, dass $C(A^T) = C((MA)^T) = C(A^T M^T)$

Da M investiesbar ist, ist M^T auch investiesbar.

Wir zeigen jetzt, dass $C(A^T) = C(A^T M^T)$

$v \in C(A^T) \Rightarrow v \in C(A^T M^T)$

$$v \in C(A^T)$$
$$\Leftrightarrow \quad v = A^T x \quad \text{für ein } x \in \mathbb{R}^m$$
$$\Rightarrow \quad v = A^T M^T y \quad \text{für } y = N^{-1} x$$
$$\Leftrightarrow \quad v \in C(A^T M^T)$$

$v \in C(A^T M^T) \Rightarrow v \in C(A^T)$

$$v \in C(A^T M^T)$$
$$\Leftrightarrow \quad v = A^T M^T y \quad \text{für ein } y \in \mathbb{R}^m$$
$$\Rightarrow v = A^T x \quad \text{für } x = Ny$$
$$\Leftrightarrow v \in C(A^T)$$

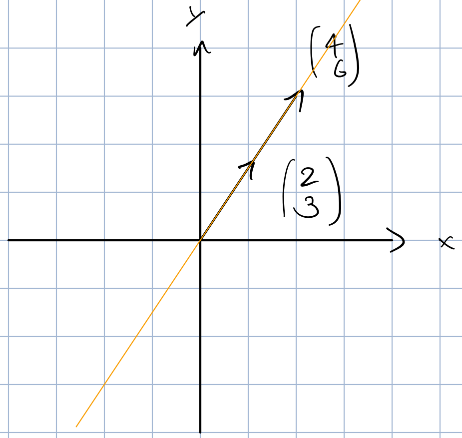
Also ist $R(A) = R(MA)$.

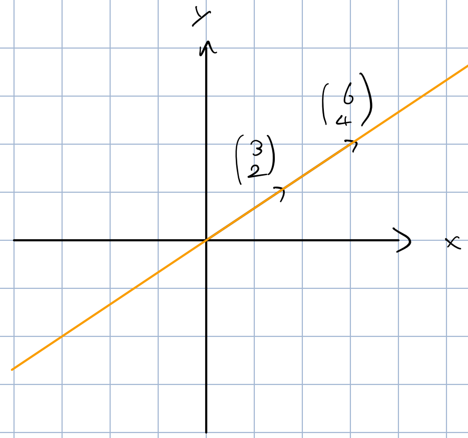
Haben A und MA den selben Spaltenraum?

Nein! Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Dann ist $MA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Also ist der Span nicht gleich, und somit auch der Spaltenraum.





Beispiel Gauss-Elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-1 \cdot \mathrm{I}) \\ (-2 \cdot \mathrm{I}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \quad (-2 \cdot \mathrm{II})$$

$$-5x_3 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$$

$$-x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -x_2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + 2 + 4 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4$$

Beispiel Gauss - Elimination 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 17 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-2 \cdot \mathrm{I}) \\ (-1 \cdot \mathrm{I}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & 26 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (-2 \cdot \mathrm{II}) \end{array}$$

Rücksubstitution: $-13c = 26 \Rightarrow c = -2$

$$b + 5c = -6 \Rightarrow b = -6 + 10 = 4$$

$$a + b + c = 3 \Rightarrow a = 3 - 4 + 2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 23 \\ 1 & 3 & -2 & 12 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-2 \cdot \mathrm{I}) \\ (-1 \cdot \mathrm{I}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right] \quad (-2 \cdot \mathrm{II})$$

Rücksubstitution: $c = 1$, $b = 4$, $a = 2$

Was fällt auf? Wir machen bei beiden Rechnungen die selben Operationen!

Also können wir beide rechten Seiten gleichzeitig machen.

Beispiel Gauss-Elimination mit n rechten Seiten

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad +2 \cdot \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \quad - \mathrm{II}$$

Rücksubstitution für $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\quad$ " $\quad$ für $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\quad$ " $\quad$ für $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Also ist $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$