Lemma 2.15 (Rank-1 matrices). *Let A be an $m \times n$ matrix. The following two statements are equivalent.*

(i) $\mathbf{rank}(A) = 1$.

(ii) There are nonzero vectors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ such that

$$A = [v_i w_j]_{i=1,j=1}^{m \quad n}.$$

Lemma 2.15

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wenn $\text{rank}(A) = 1$, dann gibt es genau eine Spalte $v \neq 0$, die linear unabhängig ist. Also sind alle vorherigen Spalten 0, und alle folgenden Spalten sind skalare Mehrfache von v. Das heisst, wir können die j-te Spalte als $w_j v$, $w_j \in \mathbb{R}$, schreiben. Sei $w \neq 0$ der Vektor dieses Skalare $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Wieso $w \neq 0$?

Also ist $A = [v_i w_j]_{i=1, j=1}^{m \quad n}$.

(i) $\Leftarrow$ (ii)

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ w_1 v & w_2 v & \cdots & w_n v \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$ wobei $v \neq 0$,

mindestens ein $w_i \neq 0$. Da $w \neq 0$

Also verwenden wir die Hand-in Aufgabe des Serie 2, und erhalten $\text{rank}(A) = 1$.

Lemma 2.60. *Let A be an invertible $m \times m$ matrix. Then the transpose $A^\top$ is also invertible, and*

$$\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Proof. We have

$$\left(A^{-1}\right)^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I^\top = I,$$

using Lemma 2.40 for the first and Definition 2.57 for the second equality. Using the definition again for matrix $A^\top$, the statement follows. □

Lemma 2.60.

Wir überprüfen, ob $(A^{-1})^T \cdot A^T = I$ (Def. Inverse)

Wir haben gesehen, dass $(AB)^T = B^T A^T$ (Lemma 2.40).

Also ist $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T$

$= I^T$ (Def. Inverse)

$= I$