Lemma 2.23

Definition Lineare Transformation: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$*$ $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$

i $T(x + x') = T(x) + T(x')$

ii $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

Wir zeigen: $*$ $\Leftrightarrow$ i und ii

$\Rightarrow$: Angenommen, $*$ gilt.

Für $x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1$ erhalten wir:

$T(x + x') \overset{*}{=} T(x) + T(x') \Rightarrow$ i

Für $x_1 = x, \quad x_2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = 0$ erhalten wir:

$T(\lambda x) \overset{*}{=} \lambda T(x) \Rightarrow$ ii

$\Leftarrow$: Angenommen i und ii gelten. Es gilt:

$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \overset{i}{=} T(\lambda_1 x_1) + T(\lambda_2 x_2)$

$\overset{ii}{=} \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$

Also folgt $*$.

Induktionsbeweis Gaussche Summenformel

Zu beweisen: $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (*)

Da $0 \in \mathbb{N}$ muss $n=0$!

Induktionsverankerung: Für $n = 0$ gilt: $\sum_{j=1}^{0} j = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$

Explizit ausrechnen, auch wenn es offensichtlich ist!

Also stimmt die Aussage für $n = 0$.

Induktionsschritt: Falls (*) für $n-1$ $(n>0)$ gilt, muss (*) auch für n gelten.

Wir nehmen an, dass (*) für $n-1$ mit $n>0$ gilt. (Induktionshypothese).

Wir zeigen jetzt, dass (*) für n gilt.

Schreibt, wenn ihr die Induktionshypothese verwendet!

$$\sum_{j=1}^{n} j = \left(\sum_{j=1}^{n-1} j\right) + n$$

$$\stackrel{IH}{=} \frac{n(n-1)}{2} + n \qquad \text{(Induktionshypothese)}$$

$$= \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Also gilt (*) für n. Dadurch haben wir bewiesen, dass (*) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.