Bitte setzt euch in den vordersten vier Reihen!

# Lineare Algebra

Übung 9, 20. November 2025

Annika Guhl, annikaguhl.com

# Programm

- Theorie-Input
- Exkurs zu Beweisen
- In-class Exercise
- Neu: alte Prüfungsaufgaben
- Falls noch Zeit: Nachbesprechung der alten Übungsaufgabe

# Theorie

# Erinnerung Woche 7

## Lösungsraum berechnen

**Theorem 4.38** (Solution space from shifting the nullspace). *Let $A$ be an $m \times n$ matrix,* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*. Let* $\mathbf{s}$ *be some solution of* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*. Then*

$$\mathbf{Sol}(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{s} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{N}(A)\}.$$

Hence, we can also compute $\mathbf{Sol}(A, b)$, despite the fact that it is not a subspace. To describe all solutions, we just need *some* solution $\mathbf{s}$ (for example the canonical one from Section 3.3.2) and a basis $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-r}\}$ of $\mathbf{N}(A)$ (see Theorem 4.36). Then

$$\mathbf{Sol}(A, \mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{s} + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \mathbf{v}_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ for } i \in [n-r] \right\}.$$

# Erinnerung Woche 7

- Wir wissen jetzt, dass N(A) das orthogonale Komplement von R(A) ist.

## Lösungsraum berechnen

**Theorem 4.38** (Solution space from shifting the nullspace). *Let $A$ be an $m \times n$ matrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Let $\mathbf{s}$ be some solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Then*

$$\mathbf{Sol}(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{s} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{N}(A)\}.$$

Hence, we can also compute $\mathbf{Sol}(A, b)$, despite the fact that it is not a subspace. To describe all solutions, we just need *some* solution $\mathbf{s}$ (for example the canonical one from Section 3.3.2) and a basis $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-r}\}$ of $\mathbf{N}(A)$ (see Theorem 4.36). Then

$$\mathbf{Sol}(A, \mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{s} + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \mathbf{v}_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ for } i \in [n-r] \right\}.$$

# Lösungsraum

- Unterschied: x1 ist einzigartig, nicht mehr beliebig

**Theorem 6.2.2.** *Suppose that* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \neq \emptyset$. *Then*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = x_1 + N(A) \text{ where } x_1 \in R(A) \text{ is unique such that } Ax_1 = b.$$

# Wie beweist man, dass ein Gleichungssystem keine Lösungen hat?

**Theorem 6.2.4.**

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \emptyset \iff \{z \in \mathbb{R}^m \mid A^T z = 0,\ b^T z = 1\} \neq \emptyset.$$

# Die Pseudoinverse

- Die Inverse kann man nur von Matrizen mit vollem Rang berechnen
- Gibt es eine Verallgemeinerung der Inversen?

# Die Pseudoinverse

- Welche Eigenschaften sollte unsere Pseudoinverse $A^\dagger$ haben?
- Sei $Ax = b$ ein Gleichungssystem.
- Wenn $Ax = b$ genau eine Lösung hat (A ist invertierbar)
  - $x = A^\dagger b$ ist die einzige Lösung von $Ax = b$ ($A^\dagger = A^{-1}$)
- Wenn $Ax = b$ mehrere Lösungen hat:
  - $x = A^\dagger b$ ist die Lösung mit der kleinsten Norm von Ax=b
- Wenn $Ax = b$ keine Lösung hat:
  - $x = A^\dagger b$ ist die Least-Squares Lösung von $Ax = b$

# Wie berechnen wir die Pseudoinverse?

- Falls A vollen Spaltenrang hat:

**Definition 6.4.1** (Pseudoinverse for matrices of full column rank). *For $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with* $\operatorname{rank}(A) = n$ *we define the pseudo-inverse $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$ of $A$ as*

$$A^\dagger = (A^\top A)^{-1} A^\top.$$

**Proposition 6.4.2.** *For $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with* $\operatorname{rank}(A) = n$*, the pseudoinverse $A^\dagger$ is a left inverse of $A$, meaning that $A^\dagger A = I$.*

# Wie berechnen wir die Pseudoinverse?

- Falls A vollen Reihenrang hat:

**Definition 6.4.3** (Pseudoinverse for matrices of full row rank). *For $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ with $\operatorname{rank}(A) = m$ we define the pseudo-inverse $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ of $A$ as*

$$A^\dagger = A^\top (AA^\top)^{-1}.$$

**Lemma 6.4.4.** *For $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ with $\operatorname{rank}(A) = m$, the pseudoinverse $A^\dagger$ is a right inverse of $A$, meaning that $AA^\dagger = I$.*

# Wie berechnen wir die Pseudoinverse?

- Für allgemeine Matrizen:

**Definition 6.4.7** (Pseudoinverse for all matrices). *For $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ with* $\operatorname{rank}(A) = r$ *and CR decomposition $A = CR$ we define the pseudoinverse $A^\dagger$ as*

$$A^\dagger = R^\dagger C^\dagger,$$

*which can be rewritten as*

$$A^\dagger = R^\top \left(RR^\top\right)^{-1} \left(C^\top C\right)^{-1} C^\top = R^\top \left(C^\top CRR^\top\right)^{-1} C^\top = R^\top \left(C^\top AR^\top\right)^{-1} C^\top.$$

- Dabei verwenden wir, dass C vollen Spaltenrang und R vollen Zeilenrang hat.

# Erinnerung CR-Zerlegung

**Theorem 2.46** (CR decomposition). *Let $A$ be an $m \times n$ matrix of rank $r$ (Definition $\boxed{2.10}$). Let $C$ be the $m \times r$ submatrix of $A$ containing the independent columns. Then there is a unique $r \times n$ matrix $R'$ such that*

$$A = CR'.$$

# Mehr zu Pseudoinversen

- Wir müssen nicht die CR-Zerlegung verwenden:

**Proposition 6.4.9.** *For* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *with* $\operatorname{rank}(A) = r$, *let* $S \in \mathbb{R}^{m\times r}$ *and* $T \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *such that* $A = ST$.

$$A^\dagger = T^\dagger S^\dagger.$$

# Mehr zu Pseudoinversen

- Eigenschaften der Pseudoinversen

**Theorem 6.4.10.** *Let* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$AA^\dagger A = A \textit{ and } A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \textit{ and } \left(A^\top\right)^\dagger = \left(A^\dagger\right)^\top.$$

$AA^\dagger$ *is symmetric. It is the projection matrix for projection on* $\mathbb{C}(A)$,

$A^\dagger A$ *is symmetric. It is the projection matrix for projection on* $\mathbb{C}(A^\top)$.

# Exkurs zu Beweisen

# Kontraposition/Indirekter Beweis

- Um zu zeigen, dass $A \longrightarrow B$, zeige $\neg B \longrightarrow \neg A$
- Beispiel: Diese beiden Aussagen sind äquivalent
  - Wenn es regnet, trage ich meine Jacke.
  - Wenn ich nicht meine Jacke trage, dann regnet es nicht.

### 2.6.3 Indirect Proof of an Implication

**Definition 2.14.** An *indirect proof* of an implication $S \Longrightarrow T$ proceeds by assuming that $T$ is false and proving that $S$ is false, under this assumption.

The soundness of this principle is explained by the following simple lemma of propositional logic, where $A$ stands for "statement $S$ is true" and $B$ stands for "statement $T$ is true".

**Lemma 2.6.** $\neg B \to \neg A \quad \models \quad A \to B.$

# Beispiel Kontraposition

Beweise: Sei $n > 2$. Falls $n$ prim ist, dann ist $n$ ungerade.

# Genau dann, wenn (if and only if)

- Wenn steht: A stimmt genau dann, wenn B stimmt, dann musst du zeigen:
  - $A \longrightarrow \mathrm{B}$ und $\mathrm{B} \longrightarrow A$

- Wenn du Kontraposition verwendest, kannst du auch zeigen, dass:
  - $\neg\mathrm{B} \longrightarrow \neg\mathrm{A}$ und $\neg\mathrm{A} \longrightarrow \neg\mathrm{B}$

# Hints

- Wenn bei einer Aufgabe steht, dass ihr ein spezifisches Theorem aus dem Skript verwenden sollt, dann macht das!
- Oder versucht es zumindest

# Blockmatrizen

- Wenn wir Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix} \text{ haben,}$$

dann können wir sie wie folgt zusammensetzen:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

Mehr Infos:
https://de.wikipedia.org/wiki/Blockmatrix

Fragen?

# Übungen

## 1. Properties of pseudoinverses (in-class) (★★☆)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ be arbitrary matrices.

**a)** Prove that if $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = n$, we have $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

**b)** Prove that $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$.

**c)** Prove that $(A^\top)^\dagger = (A^\dagger)^\top$.

**5.** Let $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$ be arbitrary. Let $A^\dagger$ be the pseudoinverse of $A$. Which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

**(a)** $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\dagger)$.

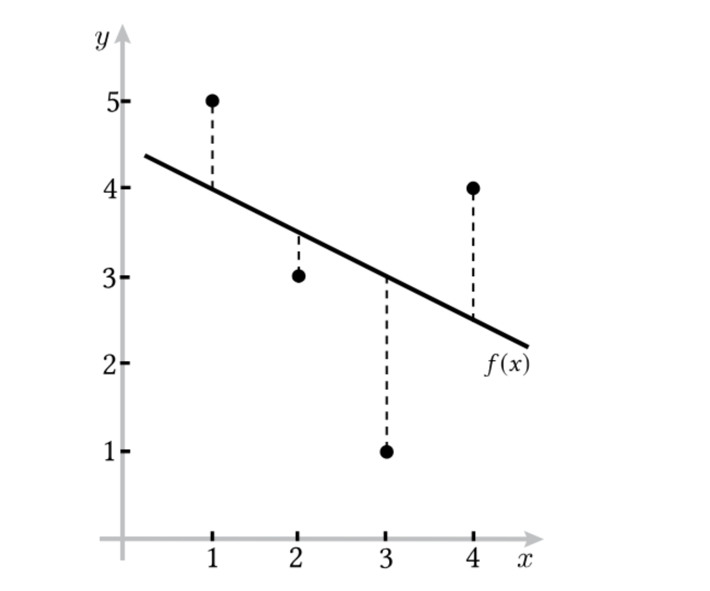
**(b)** $AA^\dagger = I$.

**(c)** $\operatorname{rank}(A^\dagger) = 5$.

**(d)** $A^\dagger A = I$.

Mock exam 2024: https://ti.inf.ethz.ch/ew/courses/LA24/mock_exam.pdf

**3. Methode der kleinsten Quadrate**




Prüfung HS20:
https://exams.vis.ethz.ch/exams/gyh0o9yj.pdf

Gegeben sind die vier Punkte

$$(x_1, y_1) = (1, 5),$$
$$(x_2, y_2) = (2, 3),$$
$$(x_3, y_3) = (3, 1),$$
$$(x_4, y_4) = (4, 4).$$

**a)** Berechnen Sie die Koeffizienten des Polynoms $f(x) = a_0 + a_1 x$ mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, so dass die vertikalen Abstände (gestrichelte Linien in der Abbildung) zwischen den Datenpunkten $(x_j, y_j)$ und dem Graphen von $f(x)$ im Sinne der kleinsten Quadrate minimiert werden: /12

$$\underset{a_0, a_1}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{4} (f(x_j) - y_j)^2.$$

**b)** Nehmen wir an, wir möchten die gegbenen Punkte mit einem Polynom $g(x) = b_0 + b_1 x$ annähren wie in Aufgabenteil **a)**. Allerdings soll die Approximation beim Punkt $(x_2, y_2) = (2, 3)$ exakt sein, das heisst $g(x_2) = y_2$. Leiten Sie das dazu passende lineare Gleichungssystem her und berechnen Sie die Lösung $b_0, b_1$. /8

**Hinweis:** Das gesuchte lineare Gleichungssystem enthält nur noch eine Variable.

**2. Fitting a parabola (hand-in) (★★☆)**

We want to determine the parameters of a certain model function from some measured values. Assume that we measured the following values

| $t_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_i$ | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 |

where $i \in [5]$. Moreover, assume that we want to model the relationship between $t, b$ by a function $f$, i.e. $b = f(t)$. In this exercise, we restrict $f$ to be a parabola, i.e. $f$ should have the form

$$f(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

for parameters $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$. Our goal is to find suitable values for $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$.

**a)** We need the following extension of Lemma 6.1.2 in the lecture notes: Let $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ and $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ with $t_i - t_j \neq 0$ for all different $i, j \in [m]$. Consider

$$A = \begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_m^2 & t_m & 1 \end{bmatrix}.$$

Show that $A$ has full column rank. Does the converse hold, that is, suppose that $A$ has full column rank, do we have $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ with $t_i - t_j \neq 0$ for all different $i, j \in [m]$?

**2. Fitting a parabola (hand-in) (★★☆)**

We want to determine the parameters of a certain model function from some measured values. Assume that we measured the following values

| $t_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_i$ | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 |

where $i \in [5]$. Moreover, assume that we want to model the relationship between $t, b$ by a function $f$, i.e. $b = f(t)$. In this exercise, we restrict $f$ to be a parabola, i.e. $f$ should have the form

$$f(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

for parameters $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$. Our goal is to find suitable values for $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$.

**b)** Following Exercise 1, write down the system of linear equations

$$A \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = b$$

that you obtain from $f(t_i) = b_i$. Compute suitable values for $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ that minimize

$$\left\| A \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} - b \right\|^2 .$$

Is the solution unique?