
Bitte setzt euch in den vorderen Reihen!

Lineare Algebra

Übung 13, 18. Dezember 2025

Annika Guhl, annikaguhl.com

Programm

- Theorie-Input
- In-Class Exercise
- Tipps für die Lern- und Prüfungsphase
- Sonstige Infos

Theorie

Spektraltheorem

Theorem 9.2.1 (Spectral Theorem)**.** *Any symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ has n real eigenvalues and an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$ consisting of its eigenvectors.*

Corollary 9.2.2. *For any symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ there exists an orthogonal matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (whose columns are eigenvectors of A) such that*

$$A = V\Lambda V^\top,$$

where $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is a diagonal matrix with the eigenvalues of A in its diagonal (and $V^\top V = I$).

Remark 9.2.3 (Eigendecomposition)**.** *The decompositions in Corollary 9.2.2 and Theorem 9.1.1 are called Eigendecompositions.*

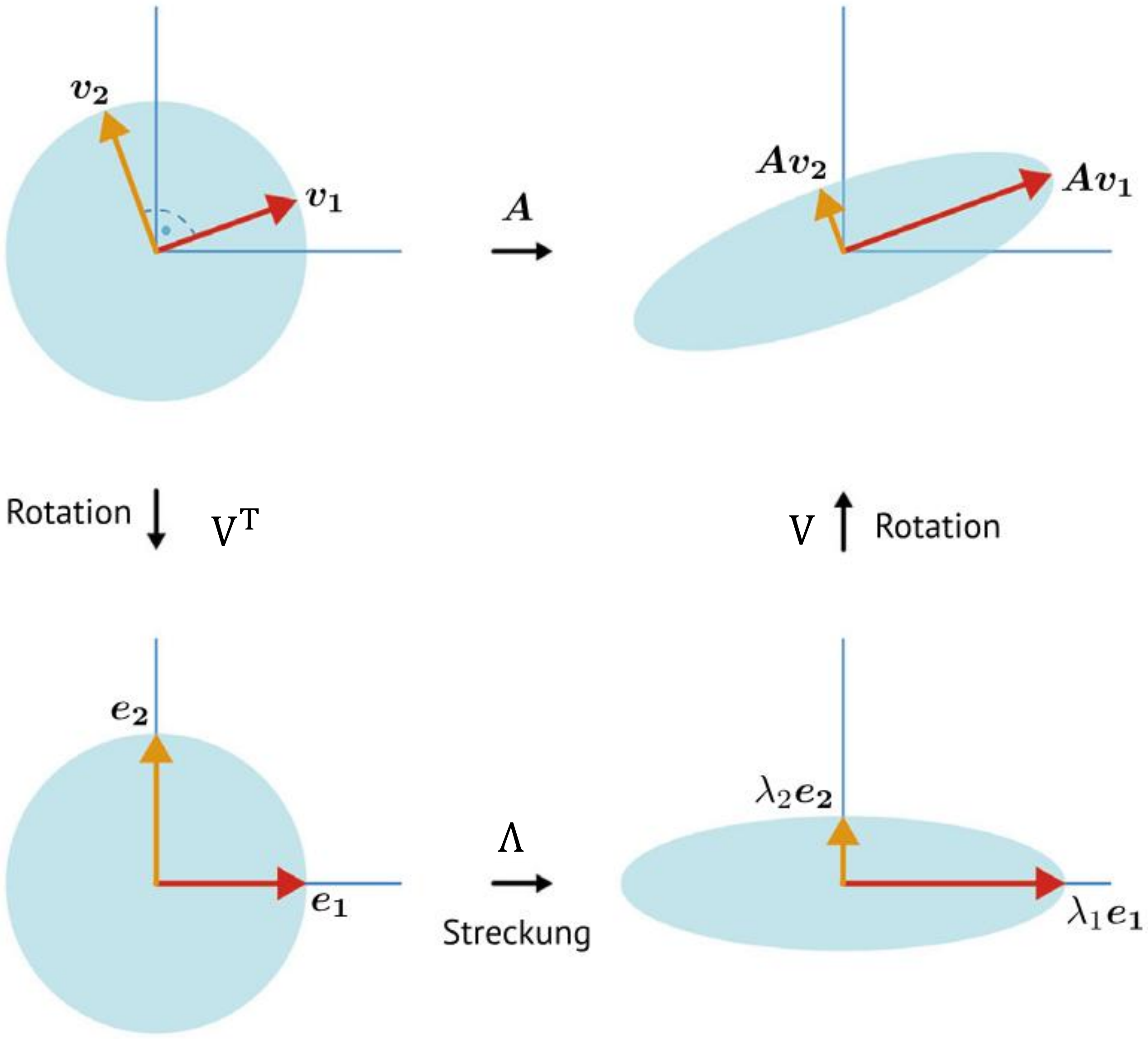

Abb. 8.1 Geometrische Interpretation des Spektralsatzes

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4

Kochrezept Eigendekomposition

Kochrezept 8.1 (Orthogonale Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen)
Gegeben: eine reelle **symmetrische** $(n \times n)$-Matrix $\boldsymbol{A}$.
Gesucht: eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{O}(n)$, sodass $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{Q}$ diagonal ist.

Schritt 1: Man bestimme die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\boldsymbol{A}$. Für jeden verschiedenen Eigenwert bestimme man eine Basis des entsprechenden Eigenraums.

Schritt 2: Für jeden verschiedenen Eigenwert bestimme man eine Orthonormalbasis (ONB) des dazugehörigen Eigenraums. Um diese ONB zu erhalten, wende man das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis aus Schritt 1 an (gemäß Kochrezept 6.1).

Schritt 3: Die gesuchte orthogonale Transformationsmatrix $\boldsymbol{Q}$ besteht aus den Vektoren der ONB aus Schritt 2 als Spalten. Damit gilt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T$ bzw. $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}$ mit

$$\boldsymbol{D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\text{Eigenwerte von } \boldsymbol{A}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Q} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{\text{ONB aus den Eigenvektoren.}}$$

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4

Beispiel Eigendekomposition

Berechne die Eigendekomposition von $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Spektraltheorem

Corollary 9.2.4. *The rank of a real symmetric matrix A is the number of non-zero eigenvalues (counting repetitions).*

Remark 9.2.5. *For general $n \times n$ (non-symmetric) matrices, the rank is n minus the dimension of the nullspace, so it is n minus the geometric multiplicity of $\lambda = 0$. Since symmetric matrices always have a complete set of eigenvalues and eigenvectors, the geometric multiplicities are always the same as the algebraic multiplicities.*

Sätze zu symmetrischen Matrizen

Lemma 9.2.7. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a symmetric matrix and $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ be two distinct eigenvalues of A with corresponding eigenvectors v_1, v_2. Then v_1 and v_2 are orthogonal.*

Lemma 9.2.8. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a symmetric matrix and $\lambda \in \mathbb{C}$ an eigenvalue of A, then $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Corollary 9.2.9. *Every symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ has a real eigenvalue λ.*

Rayleigh Quotient

Proposition 9.2.10 (Rayleigh Quotient)**.** *Given a symmetric matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *the Rayleigh Quotient, defined for* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *as*

$$R(x) = \frac{x^\top A x}{x^\top x}$$

attains its maximum at $R(v_{\max}) = \lambda_{\max}$ *and its minimum at* $R(v_{\min}) = \lambda_{\min}$ *where* $\lambda_{\max}$ *and* $\lambda_{\min}$ *are, respectively, the largest and smallest eigenvalues of* A *and* $v_{\max}$, $v_{\min}$ *their associated eigenvectors.*

Positiv (Semi-)Definit

Definition 9.2.11. *A symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is said to be Positive Semidefinite (PSD) if all its eigenvalues are non-negative. If all the eigenvalues of A are strictly positive then we say A is Positive Definite (PD).*

Proposition 9.2.12. *A symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is Positive Semidefinite if and only if $x^\top Ax \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. Analogously, a symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is Positive Definite if and only if $x^\top Ax > 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

- Analog für negativ (semi-)definit

Beispiel Positiv Semidefinit

Ist $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ positiv semidefinit?

Gramsche Matrizen

Definition 9.2.13 (Gram Matrix). *Given n vectors, $v_1, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^m$ we call their Gram Matrix the $n \times n$ matrix of inner products*

$$G_{ij} = v_i^\top v_j.$$

If $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is the matrix with columns $v_1, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^m$, then $G = V^\top V$ is the Gram matrix of V.

Remark 9.2.14. *Given a matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, as an abuse of notation, we sometimes also call $AA^\top$ a Gram matrix of A. Notice that, if $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ are the columns of A then $AA^\top$ is $m \times m$ and*

$$AA^\top = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^\top. \tag{38}$$

Proposition 9.2.15. *Given a real matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, the non-zero eigenvalues of $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are the same as the ones of $AA^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Both matrices are symmetric and positive semidefinite.*

Cholesky-Dekomposition

Proposition 9.2.16. *[Cholesky decomposition] Every symmetric positive semidefinite matrix M is a Gram matrix of an upper triangular matrix C. $M = C^\top C$ is known as the Cholesky Decomposition.*[4]

Singulärwertzerlegung

Definition 9.3.1 (SVD — Singular Value Decomposition). *Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. There exist orthogonal matrices $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ and $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that*

$$A = U \Sigma V^\top, \tag{39}$$

where $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is a diagonal matrix, in the sense that $\Sigma_{ij} = 0$ when $i \neq j$, and the diagonal elements are non-negative and ordered in descending order. $U^\top U = I$ and $V^\top V = I$.

The columns $u_1, \ldots u_m$ of U are called the left singular vectors of A and are orthonormal. The columns $v_1, \ldots v_n$ of V are called the right singular vectors of A and are orthonormal. The diagonal elements of Σ, $\sigma_i = \Sigma_{ii}$ are called the singular values of A and are ordered as

$$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{m,n\}}.$$

Singulärwertzerlegung

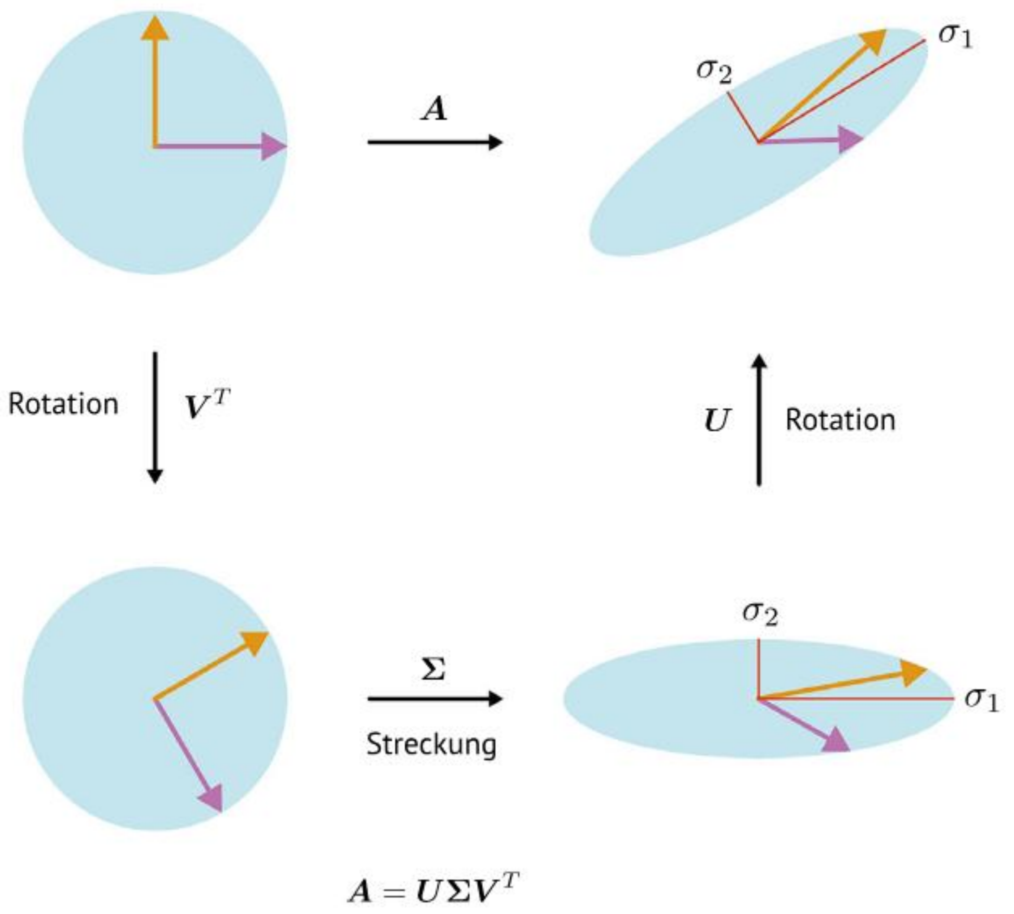

Abb. 9.1 Geometrische Interpretation der SWZ

Singulärwertzerlegung

Theorem 9.3.3. *Every matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ has an SVD decomposition of the form (39). In other words:*

Every linear transformation is diagonal when viewed in the bases of the singular vectors.

Singulärwertzerlegung

Proposition 9.3.4. *Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ be a matrix with rank r. Let $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ be the non-zero singular values of A, $u_1, \ldots, u_r$ the corresponding left singular vectors and $v_1, \ldots, v_r$ the corresponding right singular vectors. Then*

$$A = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k u_k v_k^\top . \tag{42}$$

Kochrezept Singulärwertzerlegung

Kochrezept 9.1 (SWZ von A bestimmen)

Gegeben: beliebige $(m \times n)$-Matrix A.

Gesucht: SWZ von A, d. h. eine orthogonale $(m \times m)$-Matrix U, eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix V und eine $(m \times n)$-Diagonalmatrix Σ mit $A = U \Sigma V^T$.

Schritt 1: Bilde die Matrix $A^T A$ (dies ist eine $(n \times n)$-Matrix). Man bestimme die Eigenwerte $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ (sind entweder positiv oder gleich null) und die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ von $A^T A$. Die r Singulärwerte von A sind

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$$

und die Matrix Σ wird somit

$$\Sigma = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & \cdots & 0 & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & & \vdots & \\ \hline & \vdots & & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & & \vdots & \end{array}\right]}_{m \times n}.$$

Dabei werden die r Singulärwerte $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ in fallender Ordnung auf der Hauptdiagonalen eingetragen und die Matrix Σ wird dann mit Nullen aufgefüllt, bis eine $(m \times n)$-Matrix entsteht. Die Matrix V hat die Eigenvektoren von $A^T A$ als Spalten:

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Beachte, dass aufgrund der Orthonormalität der Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ die Matrix V orthogonal ist.

Schritt 2: Bilde die Matrix AA^T (dies ist jetzt eine $(m \times m)$-Matrix) und bestimme die orthonormierten Eigenvektoren $u_1, \cdots, u_m$. Die orthogonale Matrix U hat diese Eigenvektoren als Spalten:

$$U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Schritt 3: Die gesuchte SWZ von A lautet

$$A = U \Sigma V^T = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix}}_{=U} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & \cdots & 0 & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & & \vdots & \\ \hline & \vdots & & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & & \vdots & \end{array}\right]}_{=\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} — & v_1{}^T & — \\ — & v_2{}^T & — \\ & \vdots & \\ — & v_n{}^T & — \end{bmatrix}}_{=V^T}.$$

Das Erstellen der SWZ ist schematisch in Abb. 9.2 zusammengefasst.

Weitere interessante Eigenschaften und Tipps:

- $A^T A$ und AA^T haben dieselben „Nicht-Null"-Eigenwerte (vgl. ▶ Übung 9.7). Dies fällt immer wieder bei praktischen Berechnungen auf.
- Die Links- und Rechts-Singulärvektoren stehen in enger Verbindung zueinander. Insbesondere gilt (vgl. ▶ Übung 9.8):

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \quad \text{bzw.} \quad v_i = \frac{1}{\sigma_i} A^T u_i.$$

Beispiel Singulärwertzerlegung

Berechne die Singulärwertzerlegung von $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Fragen?

Finales Feedback

In-Class Aufgabe

1. A positive semidefinite matrix (in-class) (★☆☆)

Let $n \in \mathbb{N}^+$ and let $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that $S^\top = -S$. Prove that $-S^2$ is symmetric and positive semidefinite.

Tipps zur Lern- und Prüfungsphase

Lerntipps

- Viele Wege führen zu einer bestandenen Basisprüfung, also vergleicht euch nicht mit anderen!
- Consistency is key: Es ist besser, jeden Tag ein paar Stunden zu lernen, als eine Woche vor der Prüfung jede Nacht durchzumachen.
- Macht Pausen! Die Lernphase ist lang, also ist es wichtig, dass ihr auch durchhalten könnt. Versucht mindestens 1-1.5 Tage **gar** nichts zu lernen, sondern macht etwas anderes.
- Falls ihr Fragen habt, schreibt mir ein Mail!

Prüfungstipps

- Schaut, dass ihr rechtzeitig ankommt und Legi, Stifte und Zusammenfassung (falls erlaubt) dabeihabt.
- Bei vielen Aufgaben gibt es Teilpunkte. Auch wenn ihr nicht die Aufgabe fertiglösen könnt, schreibt so viel wie ihr könnt!
- Falls eine Prüfung nicht so gut geht: Ruhig bleiben!
  - Oft braucht man nicht so viele Punkte für eine genügende Note, z. B. für LinAlg letztes Jahr benötigte man nur 51/100 Punkte. (Diese Infos findet man auf dem Discord in den fächerspezifischen Channels angepinnt)
  - Eine einzelne schlechte Prüfung kann man mit den anderen kompensieren!

Wie detailliert muss ein Beweis sein?

- Es muss klar sein, was ihr meint! Manchmal reicht dafür eine Berechnung, aber fast immer ist es sinnvoller, die Idee in Sätzen zu erklären
- Lest euren Beweis am Ende nochmal durch. Würde einer eurer Mitstudierenden verstehen, was ihr macht?
  - Falls nicht, dann müsst ihr mehr erklären!
- Es ist besser, etwas zu viel zu schreiben, als zu wenig!

Sonstiges nützliches Wissen

Notation ist nicht fix!

- Oft wird in unterschiedlichen Büchern und Kursen unterschiedliche Notation verwendet
- Beispiel: Oft werden auch runde Klammern für Matrizen oder eckige Klammern für Vektoren verwendet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Lasst euch davon nicht verunsichern! Notation ist nur Konventionssache, die Mathe dahinter funktioniert immer noch gleich!

Wie wird man TA?

- Grundsätzlich in jedem Fach unterschiedlich
- Meistens wird eine gute Note (5.75+) benötigt
  - Nach Fach mehr oder weniger wichtig, in manchen Fächern ist gutes Unterrichten wichtiger
- Manche Fächer schicken Anfragen per Mail an Leute mit guten Fächern
- Meine Empfehlung, falls ihr TA werden wollt: Schickt 1-2 Monate im neuen Semester ein Mail an den Head-TA (und die Dozenten im CC), um zu fragen wie der Bewerbungsprozess funktioniert

Prüfungsaufgaben/sonstige Aufgaben

Übung 8.6

• • ∘ Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Man zeige: Lässt sich $\boldsymbol{A}$ wie folgt darstellen:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T,$$

wobei $\boldsymbol{Q}$ orthogonal und $\boldsymbol{D}$ diagonal ist, so muss $\boldsymbol{A}$ **notwendigerweise symmetrisch** sein.

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4

Übung 9.3

• ∘ ∘ Man bestimme die SWZ der (2×3)-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4

Übung 9.7

●○○ Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeige, dass $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ dieselben „Nicht-Null“-Eigenwerte besitzen.

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4

Viel Glück!