Bitte setzt euch in den vordersten vier Reihen!

Lineare Algebra

Übung 12, 11. Dezember 2025

Annika Guhl, annikaguhl.com

Programm

- Theorie-Input
- Berechnung von Determinanten und In-class Exercise
- Alte Prüfungsaufgaben

End-of-year Kahoot

- Einige TAs organisieren ein Kahoot
- 16. September 12:30-14:00 im HG D7.2

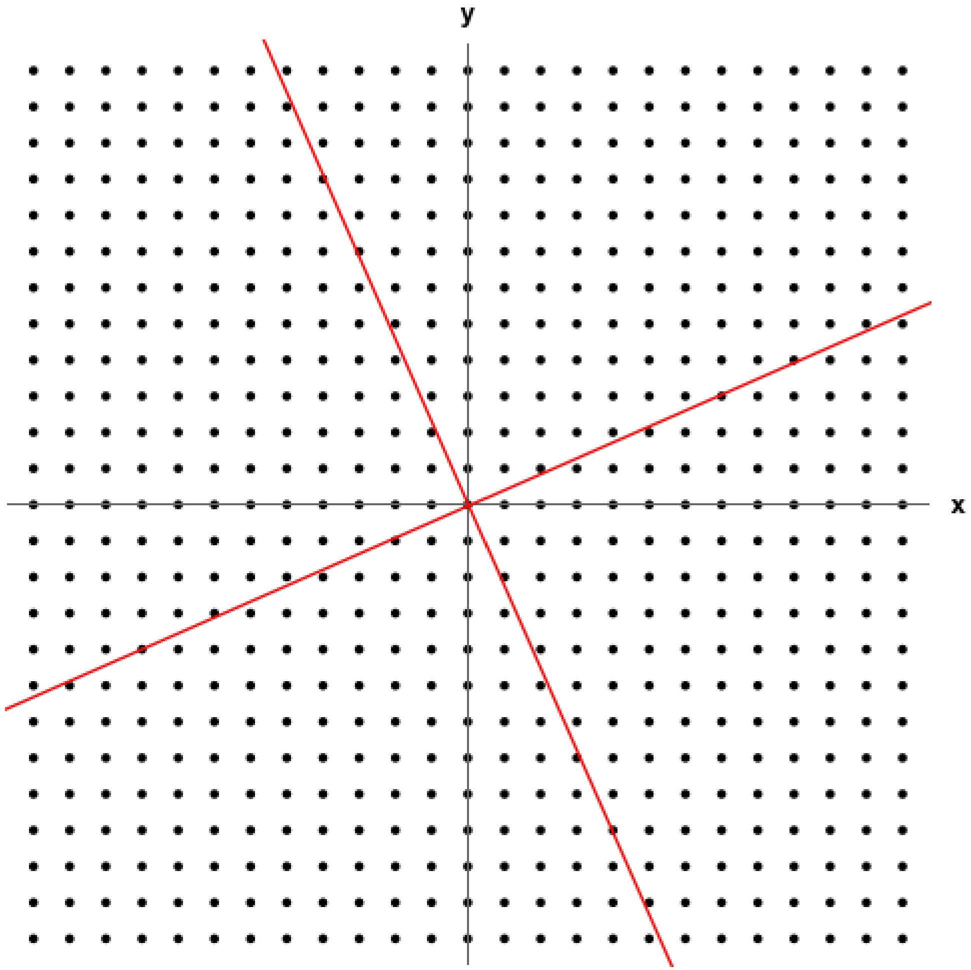
Theorie

Reale Eigenwerte/Eigenvektoren

Lemma 8.2.3. *Let* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{R}$ *is a real eigenvalue of* A *if and only if* $\det(A - \lambda I) = 0$. *A vector* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *is an eigenvector associated with the eigenvalue* λ *if (and only if)* $v \in \mathbb{N}(A - \lambda I)$.

Proposition 8.2.4. $\det(A - \lambda I)$ *is a polynomial in* λ *of degree* n. *The coefficient of the* λ^n *term is* $(-1)^n$.

Reale Eigenwerte/Eigenvektoren



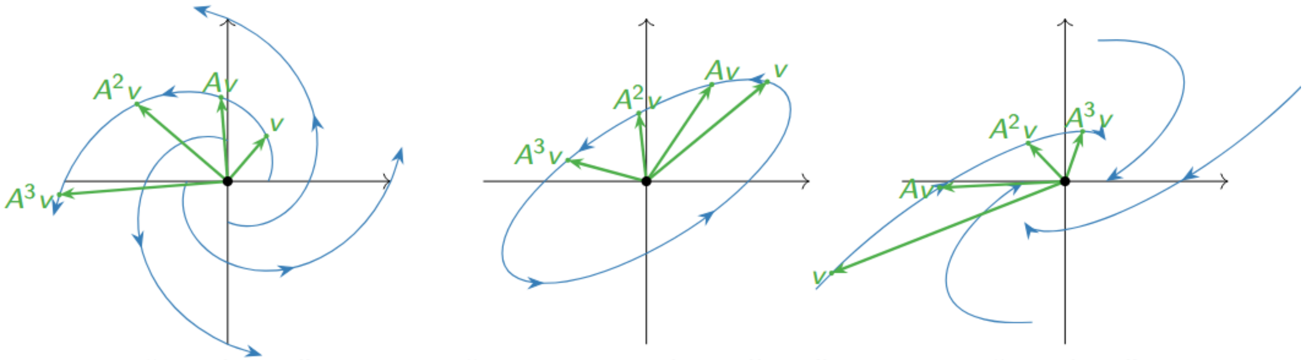
Was sind komplexe Eigenwerte?

- Betrachte $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Rotation um 90°)
- Anstelle von nur skaliert werden die komplexen Eigenwerte rotiert und skaliert

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \qquad A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 - i \qquad \lambda = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \qquad \lambda = \frac{\sqrt{3}-i}{4}$$

$$|\lambda| > 1 \qquad |\lambda| = 1 \qquad |\lambda| < 1$$



"spirals out" "rotates around an ellipse" "spirals in"

Eigenwerte/Eigenvektoren

Theorem 8.2.5. *Every matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ has an eigenvalue (perhaps complex-valued).*

Proposition 8.2.7. *Let $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be an orthogonal matrix. If $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of Q, then* $|\lambda| = 1$.

Lemma 8.2.8. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. If (λ, v) is an eigenvalue-eigenvector pair, then $(\bar{\lambda}, \bar{v})$ is an eigenvalue-eigenvector pair.*

Eigenschaften von Eigenwerten und -vektoren

Proposition 8.3.1.

(a) *If λ and v are an eigenvalue-eigenvector pair of a matrix A, then, for $k \geq 1$, λ^k and v are an eigenvalue-eigenvector pair of the matrix A^k.*

(b) *Let A be an invertible matrix. If λ and v are an eigenvalue-eigenvector pair of the matrix A, then, $\frac{1}{\lambda}$ and v are an eigenvalue-eigenvector pair of the matrix A^{-1}.*

Lemma 8.3.2. *Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and let $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ be eigenvectors corresponding to eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. If $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ are all distinct, the eigenvectors $v_1, \ldots, v_k$ are linearly independent.*

Kochrezept Eigenwerte/Eigenvektoren

Kochrezept 9.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben: eine $(n \times n)$-Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Gesucht: die Eigenwerte und Eigenvektoren/Eigenräume von A.

Schritt 1: Bilde das **charakteristische Polynom** von A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Schritt 2: Die gesuchten Eigenwerte der Matrix A sind die **Nullstellen des charakteristischen Polynoms** $p_A(\lambda)$.

Schritt 3: Um die Eigenvektoren/Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten zu bestimmen, löse man jeweils das LGS $(A - \lambda E)v = \mathbf{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus. Diese Prozedur führt man mit allen im Schritt 2 bestimmten Eigenwerte separat durch.

$\mathbb{K}$ kann $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein

Prüfungstraining Lineare Algebra: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-65886-1

Beispiel Eigenwerte/Eigenvektoren

Aufgabe 4:

c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

/7

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Werten Sie dazu die Nullstellen des charakterischen Polynoms aus.

Zusätzlich: Was sind die Eigenvektoren und die geometrische/algebraische Vielfachheit der Eigenwerte?

Prüfung HS19: https://exams.vis.ethz.ch/exams/13t0g7m8.pdf

Eigenschaften von Eigenwerten und -vektoren

Theorem 8.3.3. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ with n distinct real eigenvalues (meaning that the n zeros of $\det(A - \lambda I)$, as described in Corollary 8.1.3, are all distinct) then there is a basis of $\mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_n$, made up of eigenvectors of A.*

Allgemeine Eigenwerte, Spur

Definition 8.3.4. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

$$P(z) = (-1)^n \det(A - zI) = \det(zI - A) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n). \tag{34}$$

The polynomial $P(z)$ in (34) is called the characteristic polynomial of the matrix A. The eigenvalues $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ as they show up in (34) are not all distinct in general. The number of times an eigenvalue shows up is called the algebraic multiplicity of the eigenvalue.

The trace of A is defined as $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$.

- Also sind die Eigenwerte gegeben durch die Lösungen von P(z) = 0

Zusammenhang mit Determinante und Spur

Lemma 8.3.6. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ its n eigenvalues as they show up in (34). Then*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ and } \operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Matrix-Diagonalisierung

Theorem 9.1.1. *Let* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Suppose that* A *has eigenvectors* $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ *that form a basis of* $\mathbb{R}^n$. *For* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *let* λ_i *be the eigenvalue associated to* v_i. *Let* V *be the matrix whose columns correspond to the eigenvectors* $v_1, \ldots, v_n$. *Then,*

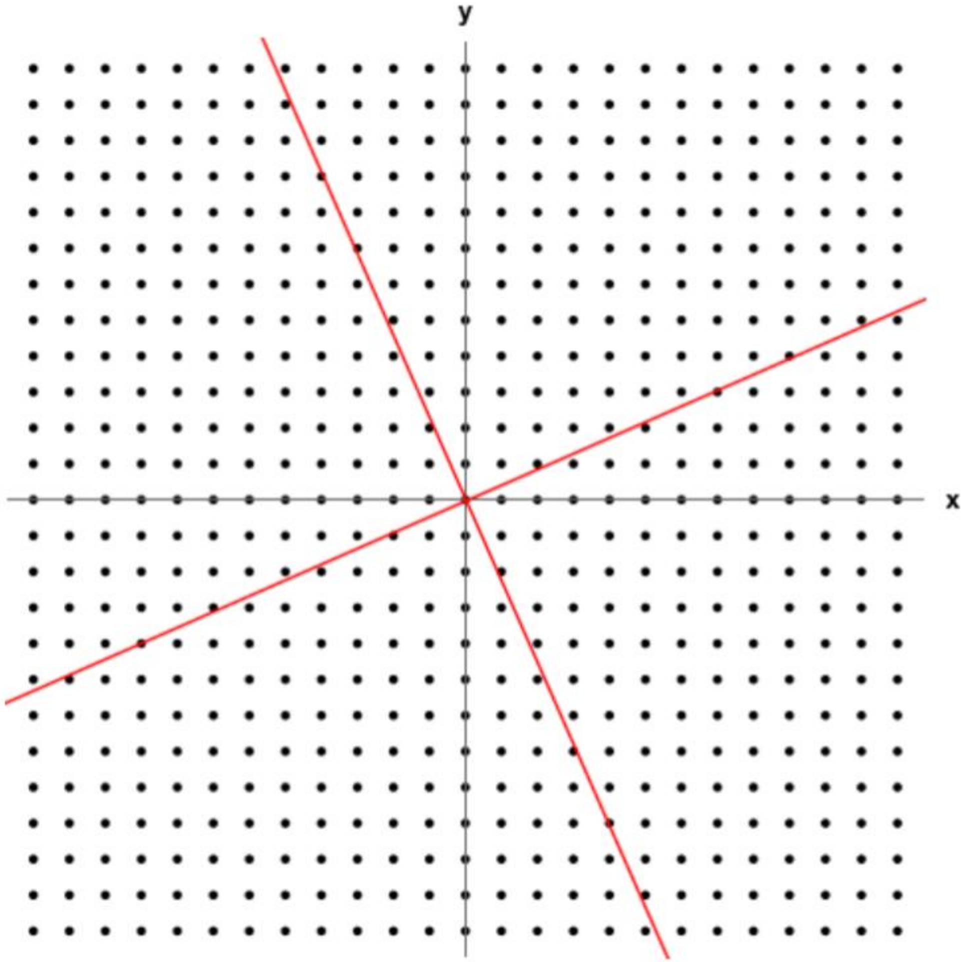
$$A = V\Lambda V^{-1}, \tag{35}$$

where Λ *is a diagonal matrix with* $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ *(and* $\Lambda_{ij} = 0$ *for all* $i \neq j$*).*

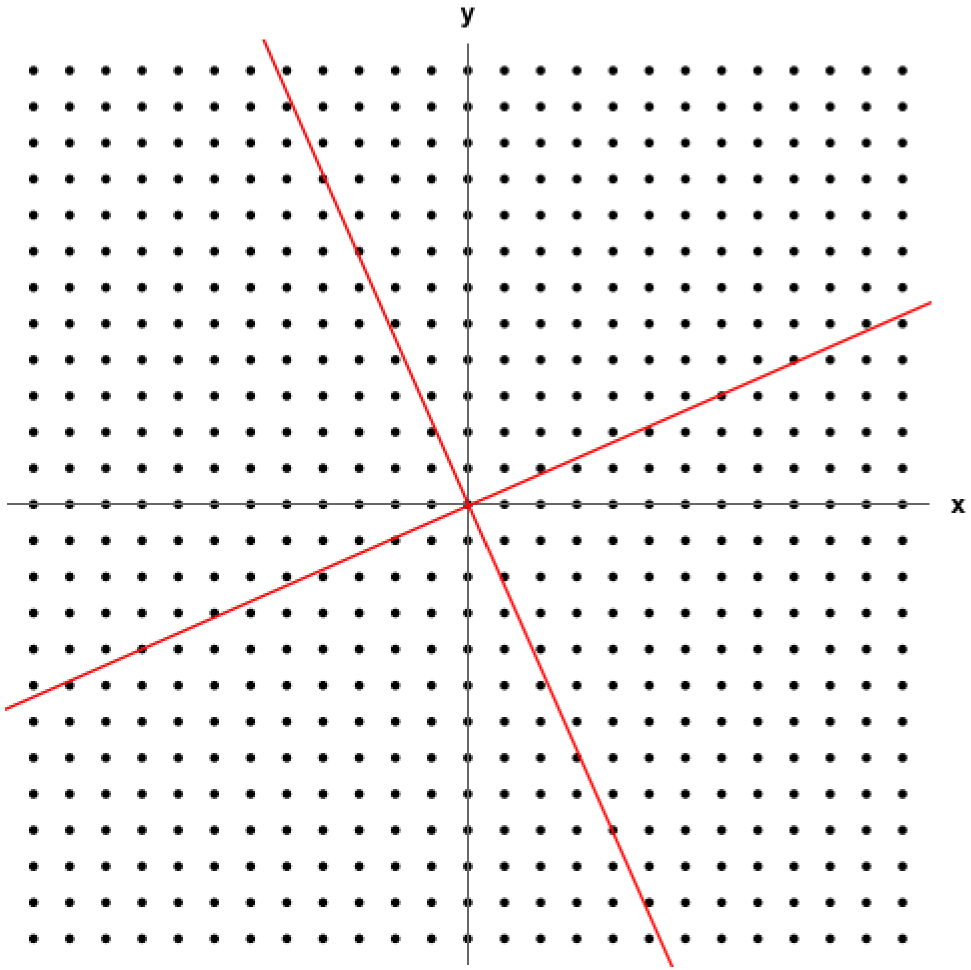
Definition 9.1.2 (Diagonalizable Matrix)**.** *A matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *is called a diagonalizable matrix if there exists an invertible matrix* V *such that* $V^{-1}AV = \Lambda$, *where* Λ *is a diagonal matrix.*

Definition 9.1.3. *If, given a matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *we can build a basis of* $\mathbb{R}^n$ *with eigenvectors of* A *we say that* A *has a complete set of real eigenvectors.*

Reale Eigenwerte/Eigenvektoren



Reale Eigenwerte/Eigenvektoren



Eigenwerte/Eigenvektoren von Diagonal/Dreiecks/Projektionsmatrizen

Example 9.1.4. *For $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonal matrix, the eigenvalues of D are the diagonal entries of D. The canonical basis $e_1, \dots, e_n$ is a complete set of real eigenvectors of D.*

Example 9.1.5. *The eigenvalues of an $n \times n$ triangular matrix are the n values in the diagonal. However, triangular matrices may not have a complete set of real eigenvectors. Try to find an example!*

Proposition 9.1.6 (Eigenvalues and Eigenvectors of a Projection Matrix)**.** *Let P be the projection matrix on the subspace $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Then P has two eigenvalues, 0 and 1, and a complete set of real eigenvectors.*

Ähnliche Matrizen

Definition 9.1.7 (Similar matrices). *We say that $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ are similar matrices if there exists an invertible matrix S such that $B = S^{-1}AS$.*

Proposition 9.1.8. *Similar matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $B = S^{-1}AS \in \mathbb{R}^{n\times n}$ have the same eigenvalues. The matrix A has a complete set of real eigenvectors if and only if B does.*

Da $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ *and* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ haben ähnliche Matrizen die gleichen Determinanten und Spuren.

Algebraische/Geometrische Vielfachheit

Definition 9.1.10. *Given a matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and an eigenvalue λ of A we call the dimension of $\mathbb{N}(A-\lambda I)$ the geometric multiplicity of λ.*

Definition 8.3.4. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

$$P(z) = (-1)^n \det(A - zI) = \det(zI - A) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n). \tag{34}$$

The polynomial $P(z)$ in (34) is called the characteristic polynomial of the matrix A. The eigenvalues $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ as they show up in (34) are not all distinct in general. The number of times an eigenvalue shows up is called the algebraic multiplicity of the eigenvalue.

Es gilt: $1 \leq$ geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit

Algebraische/Geometrische Vielfachheit

Lemma 9.1.11. *A matrix has a complete set of real eigenvectors if all its eigenvalues are real and the geometric multiplicities are the same as the algebraic multiplicites of all its eigenvalues.*

Kochrezept Matrixdiagonalisierung

Kochrezept 2.1 (Diagonalisierung)

Gegeben: eine $(n \times n)$-Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Gesucht: eine invertierbare Matrix $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, sodass $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ diagonal ist.

Schritt 1: Man bestimme die Eigenwerte $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ von $\boldsymbol{A}$ inkl. deren algebraischen Vielfachheiten (= die Vielfachheit des Eigenwertes als Nullstelle des charakteristischen Polynoms). Man bestimme die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ zu den verschiedenen Eigenwerten und ermittle deren geometrische Vielfachheiten (= die Dimension des zugehörigen Eigenraums).

Schritt 2: Man entscheide über die Diagonalisierbarkeit von $\boldsymbol{A}$ mittels des Schemas in Abb. 2.2.

Schritt 3: Ist $\boldsymbol{A}$ diagonalisierbar, so gilt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ bzw. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ mit

$$\boldsymbol{D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\text{Eigenwerte von } \boldsymbol{A}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{\text{Eigenvektoren zu } \lambda_1, \cdots, \lambda_n} .$$

Beachte: Die Diagonalelemente von $\boldsymbol{D}$ sind die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$. Die Transformationsmatrix $\boldsymbol{P}$ besitzt die verschiedenen Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ als Spalten.

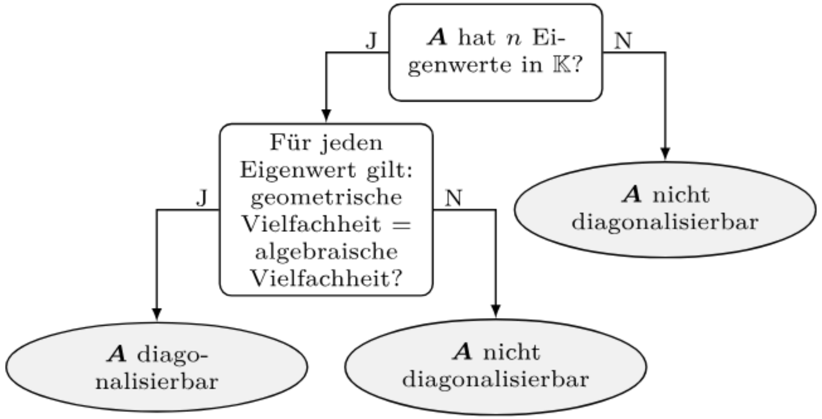


Abb. 2.2 Schnellentscheid über Diagonalisierbarkeit von $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ kann $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4

Beispiel Matrixdiagonalisierung

- Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Ist A diagonalisierbar? Was ist die Diagonalisierung?

Fragen?

In-Class Aufgaben

1. Eigenvalues and eigenvectors (in-class) (★☆☆)

a) Let $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ be such that $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. Find all real eigenvalues of A. For each real eigenvalue, find a corresponding real eigenvector of A.

b) Construct a square matrix A with eigenvalues $0, 1, 2$. Furthermore, these should be the only eigenvalues of A.

c) Construct a square matrix B with eigenvalues $0, 1, 2$ such that B is not a diagonal matrix. As before, these should be the only eigenvalues of B.

2. Eigenvalues and eigenvectors of AB and BA (in-class) (★★☆)

Let A, B be two matrices in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Let $\lambda \in \mathbb{R}$ be a real eigenvalue of AB. Prove that λ is a real eigenvalue of BA.

b) Assume that B is invertible and that AB has a complete set of real eigenvectors (according to Definition 8.2.1). Prove that BA has a complete set of real eigenvectors.

c) Assume that both A and B are invertible. Prove that AB has a complete set of real eigenvectors if and only if BA has a complete set of real eigenvectors.

d) Can you find an example of two matrices A and B such that BA has a complete set of real eigenvectors, but AB does not have a complete set of real eigenvectors?

Prüfungsaufgaben/sonstige Aufgaben

Übung 2.2

● ○ ○ Man diagonalisiere (falls möglich) die folgende Matrix über $\mathbb{K}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ über } \mathbb{K} = \mathbb{R}\,.$$

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4

Übung 2.4

● ○ ○ Man diagonalisiere (falls möglich) die folgende Matrix über $\mathbb{K}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ wobei } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}\,.$$

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4

4. Eigen- und Singulärwertzerlegung Gegeben sind die orthonormierten Eigenvektoren

/20

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0.$$

a) Konstruieren Sie die Matrix $\mathbf{A}$, die die angegebene Eigenzerlegung besitzt. /6

b) Geben Sie die Determinante der Matrix an. /3

c) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 16 & 2 & 8 \end{pmatrix}^\top$ Teil des Kerns von $\mathbf{A}$ ist. /5

Prüfung FS20: https://exams.vis.ethz.ch/exams/0uy4t5vi.pdf

/4

[k] [f] Eine normierte Eigenzerlegung einer Matrix ist die Menge ihrer Eigenwerte mit zugehörigen normierten Eigenvektoren. Zwei Zerlegungen, die sich nur durch ihre Reihenfolge unterscheiden, betrachten wir als identisch.

○ ○ Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine eindeutig bestimmte normierte Eigenzerlegung.

○ ○ Eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine eindeutig bestimmte normierte Eigenzerlegung.

○ ○ Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat n verschiedene normierte Eigenzerlegungen.

○ ○ Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten hat 2^n verschiedene normierte Eigenzerlegungen.

Prüfung FS20: https://exams.vis.ethz.ch/exams/0uy4t5vi.pdf

Übung 9.19

● ○ ○ Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert der folgenden Matrix?

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Wie lauten die weiteren Eigenwerte von A?

Prüfungstraining Lineare Algebra: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-65886-1

Übung 2.6

• • ○ Man diagonalisiere (falls möglich) die folgende Matrix über $\mathbb{K}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\,.$$

Prüfungstraining Lineare Algebra Band 2: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68942-4