

**Bitte setzt euch in den
vordersten vier Reihen!**

Lineare Algebra

Übung 11, 4. Dezember 2025

Programm

- Theorie-Input
- Berechnung von Determinanten und In-class Exercise
- Alte Prüfungsaufgaben

Theorie

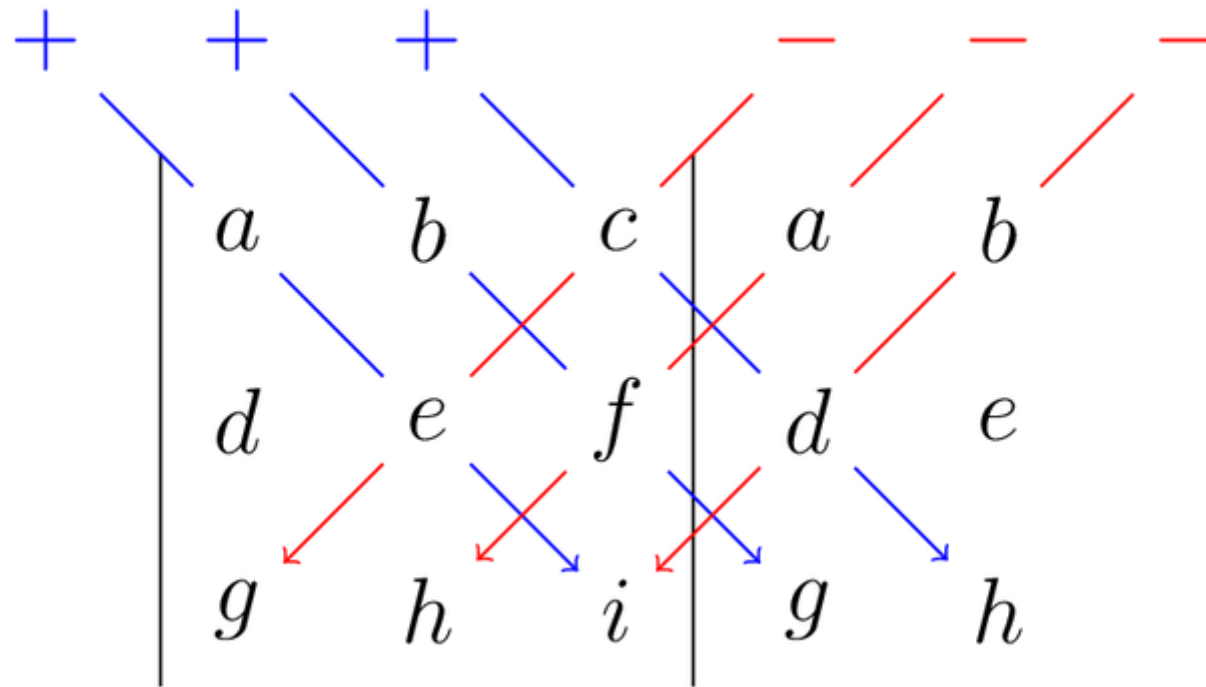
Determinanten: 2x2 Matrizen

Definition 7.1.1. *Let*

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

The determinant of A is $\det(A) = ad - bc$.

3x3 Matrizen: Regel von Sarrus



$$\det(A) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$$

Vorzeichen einer Permutation

Definition 7.2.1 (Sign of a permutation). *Given a permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ of n elements, its sign $\text{sgn}(\sigma)$ can be 1 or -1 . The sign counts the parity of the number of pairs of elements that are out of order (sometimes called inversions) after applying the permutation. In other words,*

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } |(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \text{ such that } i < j \text{ and } \sigma(i) > \sigma(j)| \text{ is even,} \\ -1 & \text{if } |(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \text{ such that } i < j \text{ and } \sigma(i) > \sigma(j)| \text{ is odd.} \end{cases}$$

Example 7.2.2. *Let $n = 4$. Consider the permutation π defined as $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 4$. The pairs (i, j) such that $i < j$ are*

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4).$$

For all these listed pairs (i, j) we have that $\pi(i) < \pi(j)$ except for the pair $(2, 3)$. Hence, $\text{sgn}(\pi) = -1$.

Vorzeichen einer Permutation

Definition 7.2.1 (Sign of a permutation). *Given a permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ of n elements, its sign $\text{sgn}(\sigma)$ can be 1 or -1 . The sign counts the parity of the number of pairs of elements that are out of order (sometimes called inversions) after applying the permutation. In other words,*

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } |(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \text{ such that } i < j \text{ and } \sigma(i) > \sigma(j)| \text{ is even,} \\ -1 & \text{if } |(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \text{ such that } i < j \text{ and } \sigma(i) > \sigma(j)| \text{ is odd.} \end{cases}$$

- Sei P die Permutationsmatrix, die σ entspricht. Sei k die Anzahl von 1-Elementen, die unter der Diagonale von P sind. Dann ist $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ und $\text{Det}(P) = (-1)^k$.

Determinanten (generell)

Definition 7.2.3. *Given a square matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ the determinant $\det(A)$ is defined as*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Pi_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma(i)},$$

where Π_n is the set of all permutations of n elements.

Eigenschaften von Determinanten

Proposition 7.2.4.

- (a) *Given a permutation matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ corresponding to a permutation σ , then $\det(P) = \text{sgn}(\sigma)$. We sometimes also write $\text{sgn}(P)$.*
- (b) *Given a triangular (either upper- or lower-) matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ we have*

$$\det(T) = \prod_{k=1}^n T_{kk},$$

in particular, $\det(I) = 1$.

- (c) *If $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is an orthogonal matrix then*

$$\det(Q) = 1 \quad \text{or} \quad \det(Q) = -1.$$

Eigenschaften von Determinanten

Theorem 7.2.5. *Given a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, then*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Theorem 7.2.6.

- *A matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is invertible if and only if*

$$\det(A) \neq 0.$$

- *Given matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ we have*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

- *Given a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that $\det(A) \neq 0$, then A is invertible and*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Kofaktoren

Definition 7.3.1. Given $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, for each $1 \leq i, j \leq n$ let \mathcal{A}_{ij} denote the $(n-1) \times (n-1)$ matrix obtained by removing row i and column j from A . Then we define the co-factors of A as

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathcal{A}_{ij}).$$

- Beispiel: Berechne $C_{2,3}$ von $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 9 & 11 \end{bmatrix}$.
- Wir streichen die zweite Zeile und dritte Spalte: $\mathcal{A}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$.
- Es gilt $\det(\mathcal{A}_{2,3}) = 9 + 4 = 13$, also $C_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot 13 = -13$.

Determinante mit Kofaktoren berechnen

Proposition 7.3.2. *Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, for any $1 \leq i \leq n$,*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{ij}C_{ij}.$$

Beispiel

Proposition 7.3.2. Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, for any $1 \leq i \leq n$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{ij}C_{ij}.$$

- Beispiel: Berechne die Determinante von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Beispiel

Proposition 7.3.2. Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, for any $1 \leq i \leq n$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{ij}C_{ij}.$$

1. Computing determinants (in-class) (★☆☆)

- a) For what values of $a, b, c \in \mathbb{R}$ is the determinant of the following matrix zero? (You should justify your answer.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & c \\ a & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & b & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hint: Use Proposition 7.3.2.

Determinante mit Gauss-Elimination

- Wenn wir eine obere Dreiecksmatrix haben, dann können wir die Determinante sehr einfach berechnen (Produkt der Diagonaleinträge)
- Mit Gauss-Elimination können wir eine beliebige Matrix A zu einer oberen Dreiecksmatrix U umformen.
- Verändert sich die Determinante während Gauss-Elimination?

Gauss-Elimination

Algorithm 2 Gauss elimination:

Returns a triple $(U, \mathbf{c}, \text{result})$ such that the systems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ and $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ have the same solutions. If $\text{result} = \text{"succeeded"}$, U is upper triangular with all diagonal elements nonzero.

```
1: function GAUSS ELIMINATION( $A, \mathbf{b}$ ) ▷  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 
2:    $U \leftarrow A, \mathbf{c} \leftarrow \mathbf{b}$ 
3:   for  $j = 1, 2, \dots, m$  do ▷ eliminate in column  $j$ 
4:     if  $u_{jj} = 0$  then ▷ zero pivot
5:       if there is some  $k > j$  such that  $u_{kj} \neq 0$  then
6:         exchange (row  $j$ ) and (row  $k$ ) (in both  $U$  and  $\mathbf{c}$ ) ▷ row operation
7:       else ▷ give up
8:         return  $(U, \mathbf{c}, \text{"failed"})$ 
9:       end if
10:    end if ▷ now,  $u_{jj} \neq 0$ 
11:    for  $i = j + 1, j + 2, \dots, m$  do ▷ make  $u_{ij} = 0$ 
12:       $\lambda \leftarrow \frac{u_{ij}}{u_{jj}}$  ▷ we want  $u_{ij} - \lambda u_{jj} = 0$ 
13:      subtract  $\lambda \cdot$  (row  $j$ ) from (row  $i$ ) (in both  $U$  and  $\mathbf{c}$ ) ▷ row operation
14:    end for
15:  end for ▷ now,  $U$  is upper triangular, with all diagonal elements nonzero
16:  return  $(U, \mathbf{c}, \text{"succeeded"})$ 
17: end function
```

Determinante mit Gauss-Elimination

3.2 Determinante und Gauß-Algorithmus

Für die Berechnung von großen Determinanten ist die explizite Formel mittels der Laplace-Entwicklung eher unpraktisch. Der **Gauß-Algorithmus** bietet oft eine schnellere Methode solche Determinanten zu berechnen.

Praxistipp

Die grundlegende Idee dieser Methode ist, die Determinante auf **Dreiecksform** mittels elementaren Zeilenoperationen zu transformieren. Dabei muss beachtet werden:

- Wenn man zwei Zeilen oder Spalten vertauscht, ändert die Determinante das Vorzeichen (**Vertauschen**).
- Wird eine Zeile oder Spalte mit einer Zahl k multipliziert, so wird die Determinante mit k multipliziert (**Skalierung**).
- Die Determinante ändert sich nicht, wenn man das Vielfache einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile oder Spalte addiert (**Addition**).

Beispiel

1. Computing determinants (in-class) (★☆☆)

- b) It turns out that the determinant of a triangular matrix is easy to calculate (Proposition 7.2.4). Moreover, the determinant does not change when a multiple of a row is added to another row (and row swaps only change the sign). This allows us to efficiently determine the determinant of any matrix using Gauss elimination. Determine the determinant of

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

by performing the Gauss elimination manually.

Beispiel

- Berechne die Determinante von $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ mit Gauss-Elimination

Übersicht Determinanten berechnen

- 2x2 Matrix: Direkt mit Formel berechnen
- 3x3 Matrix: Mit Formel/Regel von Sarrus berechnen
- nxn Matrix:
 - Falls eine Zeile/Spalte viele Nullen hat: Determinante mit Kofaktoren (Proposition 7.3.2) berechnen
 - Sonst: Determinante mit Gauss-Elimination berechnen
- Nie: Direkt mit Definition berechnen (sehr viel Rechenaufwand)

Inverse mit Determinanten

Proposition 7.3.3. *Given $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ with $\det(A) \neq 0$ we have*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^{\top},$$

where C is the $n \times n$ matrix with the co-factors of A as entries.

- Meistens verwenden wir andere Methoden (z.B Gauss-Jordan), um Inverse zu berechnen, da es aufwändig ist, Determinanten zu berechnen.

Cramersche Regel

Proposition 7.3.5 (Cramer's Rule). *Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that $\det(A) \neq 0$ and $b \in \mathbb{R}^n$ then the solution $x \in \mathbb{R}^n$ of $Ax = b$ is given by*

$$x_j = \frac{\det(\mathcal{B}_j)}{\det(A)},$$

where \mathcal{B}_j is the matrix obtained by A by replacing the j -th column of A with the vector b .

Cramersche Regel

Proposition 7.3.5 (Cramer's Rule). *Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that $\det(A) \neq 0$ and $b \in \mathbb{R}^n$ then the solution $x \in \mathbb{R}^n$ of $Ax = b$ is given by*

$$x_j = \frac{\det(\mathcal{B}_j)}{\det(A)},$$

where \mathcal{B}_j is the matrix obtained by A by replacing the j -th column of A with the vector b .

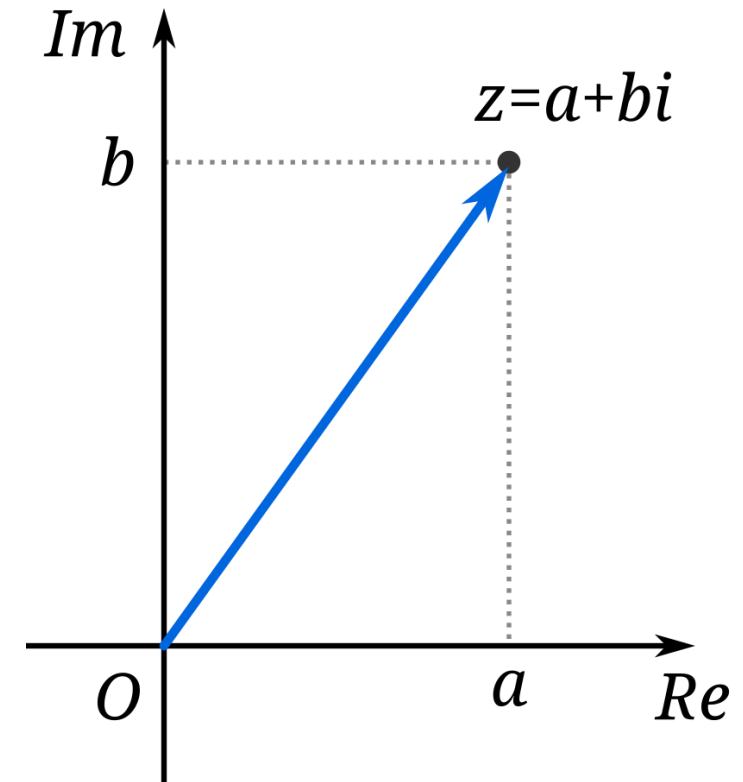
Als Beispiel lösen wir das folgende LGS mit der Cramer'schen Regel:

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Beispiel aus Prüfungstraining Lineare Algebra: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-65886-1>

Komplexe Zahlen

- Komplexe Zahlen haben die Form $a + bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind und die imaginäre Einheit i die Gleichung $i^2 = -1$ erfüllt.
- Wir können uns komplexe Zahlen als Punkte einer Ebene vorstellen, wobei a die x-Koordinate ist und der imaginäre Anteil b die y-Koordinate ist:



Komplexe Zahlen

- Wir können mit komplexen Zahlen wie folgt rechnen:

- $(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y),$

- $(a + ib)(x + iy) = ax + i(ay + bx) + i^2by = ax + i(ay + bx) - by = (ax - by) + i(ay + bx),$

- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2,$

- $\frac{a+ib}{x+iy} = \frac{(x-iy)(a+ib)}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{(ax+by)+i(bx-ay)}{x^2+y^2} = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{bx-ay}{x^2+y^2}\right).$

- Also rechnen wir wie in \mathbb{R} und behandeln i wie eine Variable, jedoch ersetzen wir i^2 mit -1 .

Komplexe Zahlen

- Zusätzlich definieren wir:

Given $z \in \mathbb{C}$ with $z = a + ib$ we have the following notation

$$(16) \quad \Re(a + ib) := a \quad \text{called the real part of } z = a + ib,$$

$$(17) \quad \Im(a + ib) := b \quad \text{called the imaginary part of } z = a + ib,$$

$$(18) \quad |z| := \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{called the modulus of } z = a + ib,$$

$$(19) \quad \overline{a + ib} := a - ib \quad \text{called the complex conjugate of } z = a + ib.$$

Note that for $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, we have $|z|^2 = z\bar{z}$, $z_1z_2 = z_2z_1$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, and $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Komplexe Zahlen - Polardarstellung

Remark 8.1.1. Given $\theta \in \mathbb{R}$, we have

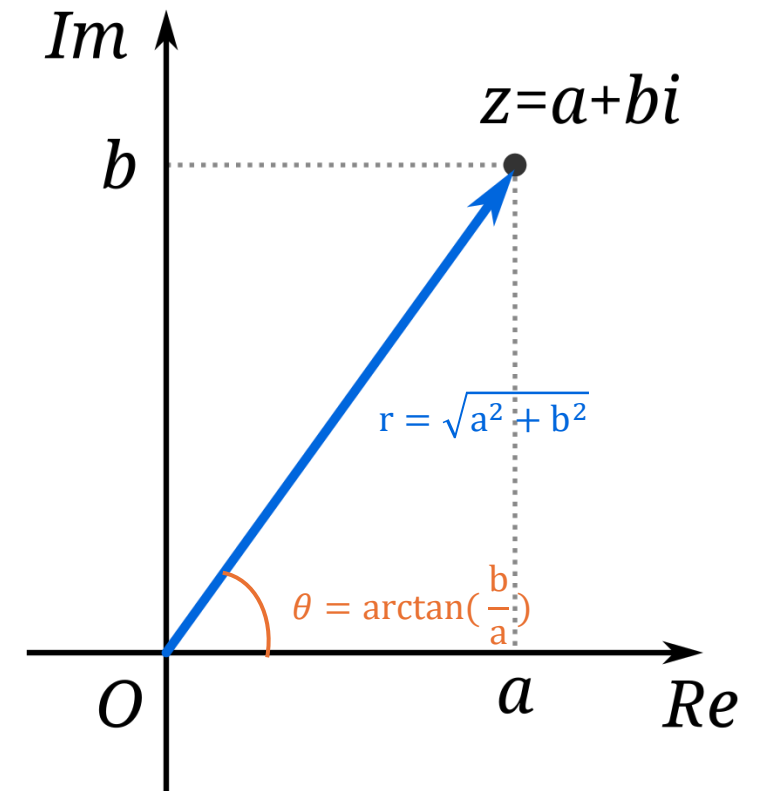
$$(20) \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

This means, in particular, that $e^{i\pi} = -1$. This is usually written as $e^{i\pi} + 1 = 0$ and known as Euler's formula.

A complex number $z \in \mathbb{C}$ can be written as

$$(21) \quad z = re^{i\theta},$$

where $r \geq 0$ is the modulus of z and $\theta \in \mathbb{R}$ (we can restrict to $\theta \in [0, 2\pi[$) is an angle, also called the argument of z . This is known under the name polar coordinates.



Komplexe Zahlen - Polardarstellung

- Umrechnung von Polardarstellung und kartesischen Koordinaten:
- Sei $z = a + bi$ die kartesische Darstellung und $z = re^{i\theta}$ die Polardarstellung
- Von Polar- zu kartesischen Koordinaten:
 - $a = r \cdot \cos(\theta)$
 - $b = r \cdot \sin(\theta)$
- Von kartesischen zu Polarkoordinaten:
 - $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
 - $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 8.2.1. Given $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, we say $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of A and $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ is an eigenvector of A , associated with the eigenvalue λ , when the following holds:

$$Av = \lambda v.$$

We call them an eigenvalue-eigenvector pair. If $\lambda \in \mathbb{R}$ then we will call λ a real eigenvalue, and the associated eigenvalue-eigenvector pair a real eigenvalue-eigenvector pair.

Fragen?

Alte Prüfungsaufgaben

[k] [f] Gegeben sei die untere Dreiecksmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{N}^{3 \times 3}$, deren Einträge natürliche Zahlen sind und für die gilt, dass alle Einträge entweder nur einmal vorkommen oder Null sind. Markieren Sie für jede der folgenden Zahlen, ob sie der Wert der Determinante $\det(\mathbf{A})$ sein kann [k] oder nicht [f].

5

6

-2

35

[k] [f] Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Markieren Sie für jede folgende Aussage, ob sie korrekt [k] oder falsch [f] ist.

- Es gilt $\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB})$.
- Es gilt $\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.
- Es gilt $\det(\mathbf{A})^{-1} = \det(\mathbf{A}^{-1})$ falls \mathbf{A} invertierbar ist.
- Es gilt $|\det(\mathbf{A})| = 1$ genau dann wenn \mathbf{A} orthogonal ist.

2

Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für $z \in \mathbb{C}$ und $\theta \in \mathbb{R}$?

- $\operatorname{Re}(e^{i\theta}) \geq 0.$
- $\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}.$
- $|z^2 e^{i\theta}| = |\bar{z}|^2.$
- $|z + e^{i\theta}| \geq |z|.$

Prüfung HS20: <https://exams.vis.ethz.ch/exams/gyh0o9yj.pdf>

Welche der folgenden Aussagen über komplexe Matrizen ist richtig?

- Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar.
- Der Rang der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ i & 1+i \\ 1-i & -2i \end{pmatrix}$ ist 2.
- Ist $\mathbf{A} = i \mathbf{I}$, so ist $\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}$.
- Es gibt genau zwei 2×2 Matrizen \mathbf{A} mit $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$.

Übung 3.16

• • ◦ Sei A eine schiefsymmetrische $(n \times n)$ -Matrix. Man zeige, dass für ungerades n

$$\det(A) = 0$$

ist. Ist diese Aussage auch richtig für n gerade?

Übung 3.14

• • ◦ Es seien $A, B \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ invertierbare $(n \times n)$ -Matrizen. Man berechne

a) $\det\left(BA^{-T}B^{-1}\right) \det\left(E + (A - E)(A + E)\right) \det\left(A^{-1}\right)$

b) $\det\left(E + A^{-T}B^{-1}(AB)^T\right)$