

**Bitte setzt euch in den
vordersten vier Reihen!**

Lineare Algebra

Übung 10, 27. November 2025

Programm

- Korrektur In-Class Exercise 9
- Theorie-Input
- In-class Exercise
- Besprechung Bonusaufgabe
- Alte Prüfungsaufgaben

1. Properties of pseudoinverses (in-class) (★★☆)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ be arbitrary matrices.

a) Prove that if $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$, we have $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Proposition 6.4.9. For $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, with $\text{rank}(A) = r$, let $S \in \mathbb{R}^{m \times r}$ and $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$ such that $A = ST$.

$$A^\dagger = T^\dagger S^\dagger.$$

Theorie

Orthonormale Vektoren

- Eine Menge von Vektoren ist orthonormal, falls sie orthogonal sind und alle Norm 1 haben.

Definition 6.3.1 (Orthonormal vectors). *Vectors $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^m$ are orthonormal if they are orthogonal and have norm 1. In other words, for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$*

$$q_i^T q_j = \delta_{ij},$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta

$$(8) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j. \end{cases}$$

Orthonormale Vektoren

Definition 5.1.1. *Two vectors $v, w \in \mathbb{R}^n$ are called orthogonal if $v^T w = \sum_{i=1}^n v_i w_i = 0$. Two subspaces V and W are orthogonal if for all $v \in V$ and $w \in W$, the vectors v and w are orthogonal.*

Definition 1.11 (Euclidean norm). *Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. The Euclidean norm of \mathbf{v} is the number*

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Orthogonale Matrix

Definition 6.3.3 (Orthogonal Matrix). *A square matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is an orthogonal matrix when $Q^\top Q = I$. In this case, $QQ^\top = I$, $Q^{-1} = Q^\top$, and the columns of Q form an orthonormal basis for \mathbb{R}^n .*

Proposition 6.3.6. *Orthogonal matrices preserve norm and inner product of vectors. In other words, if $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is orthogonal then, for all $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$\|Qx\| = \|x\| \text{ and } (Qx)^\top (Qy) = x^\top y$$

Projektionen mit Orthonormalen Basen

Proposition 6.3.7. *Let S be a subspace of \mathbb{R}^m and q_1, \dots, q_n be an orthonormal basis for S . Let Q be the $m \times n$ matrix whose columns are the q_i 's; $Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$. Then the Projection Matrix that projects to S is given by QQ^\top and the Least Squares solution to $Qx = b$ is given by $\hat{x} = Q^\top b$.*

Wie finden wir eine orthonormale Basis von S ?

- Idee: Wir gehen jeden Vektor durch. Bei jedem Vektor:
 - Entfernen wir die Anteile der vorherigen Vektoren (indem wir die Projektion auf diese abziehen), damit der Vektor orthogonal zu allen vorherigen Vektoren ist
 - Normieren wir den Vektor, damit alle Vektoren am Schluss Norm 1 haben.

Gram-Schmidt Algorithmus

Algorithm 6.3.8. *[Gram-Schmidt Process] Given n linearly independent vectors a_1, \dots, a_n that span a subspace S , the Gram-Schmidt process constructs q_1, \dots, q_n in the following way:*

- $q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$.
- For $k = 2, \dots, n$ set
$$q'_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k^\top q_i) q_i$$
$$q_k = \frac{q'_k}{\|q'_k\|}.$$

Theorem 6.3.9 (Correctness of Gram-Schmidt). *Given n linearly independent vectors a_1, \dots, a_n , the Gram-Schmidt process returns an orthonormal basis for the span of a_1, \dots, a_n .*

QR-Dekomposition

Definition 6.3.10 (QR decomposition). *Let A be an $m \times n$ matrix with linearly independent columns. The QR decomposition is given by*

$$A = QR,$$

where Q is an $m \times n$ matrix with orthonormal columns (they are the output of Gram Schmidt, Algorithm [6.3.8](#), on the columns of A) and R is an upper triangular matrix given by $R = Q^T A$.

Lemma 6.3.11. *The matrix R defined in Definition [6.3.10](#) is upper triangular and invertible. Moreover, $QQ^T A = A$ and hence, $A = QR$ is well defined.*

QR-Dekomposition

Fact 6.3.12. *The QR decomposition greatly simplifies calculations involving Projections and Least Squares.*

- *Since $\mathbb{C}(A) = \mathbb{C}(Q)$ then projections on $\mathbb{C}(A)$ can be done with Q which means they are given by $\text{proj}_{\mathbb{C}(A)}(b) = QQ^\top b$.*
- *The least squares solution to $Ax = b$ denoted by \hat{x} is defined as a solution of the normal equations (recall (4))*

$$A^\top A \hat{x} = A^\top b.$$

Furthermore, $A^\top A = (QR)^\top (QR) = R^\top Q^\top QR = R^\top R$, and so we can write

$$(9) \quad R^\top R \hat{x} = R^\top Q^\top b.$$

Since R^\top is invertible we can simplify (9) to

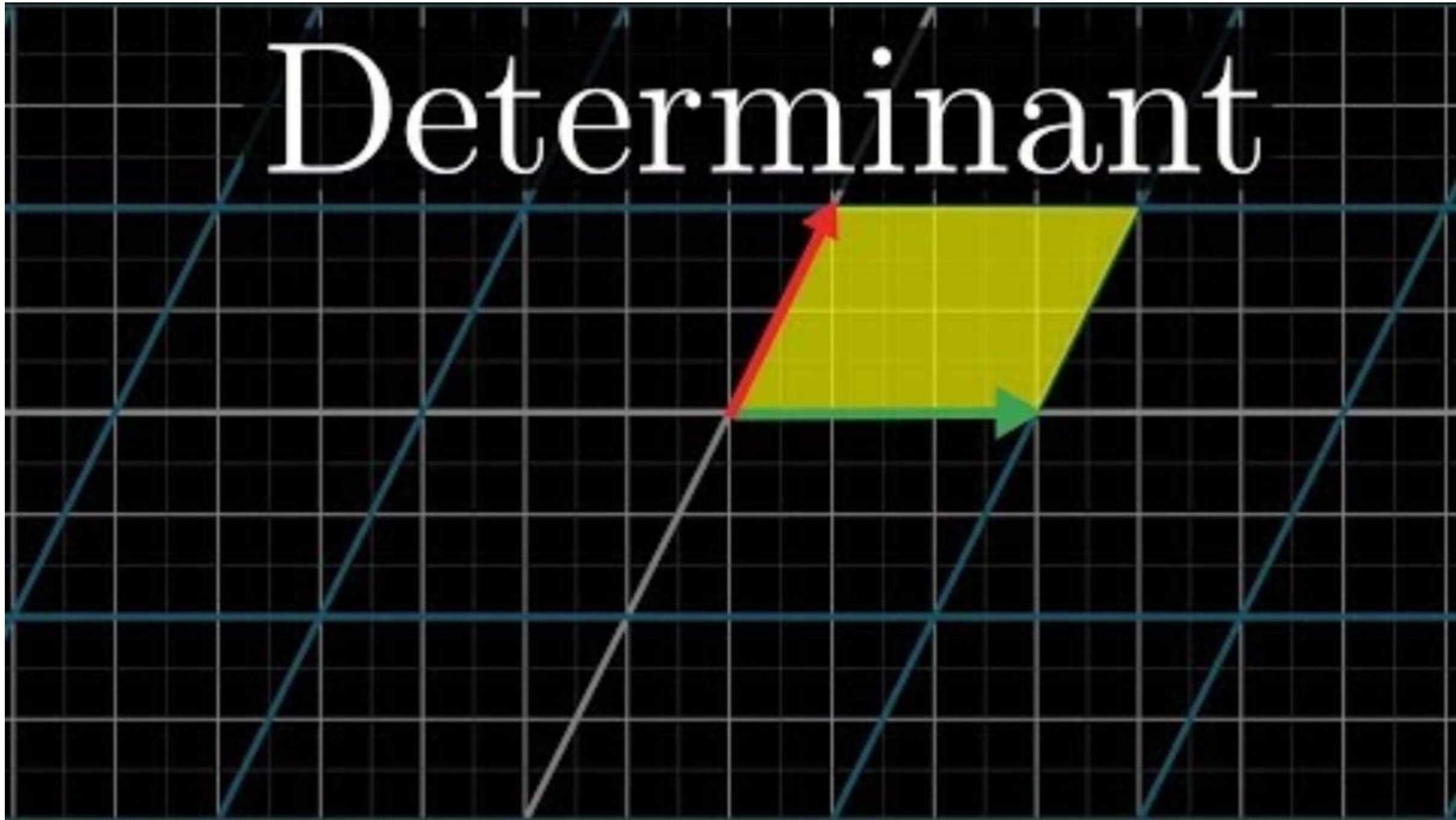
$$(10) \quad R \hat{x} = Q^\top b,$$

which can be efficiently solved by back-substitution since R is a triangular matrix.

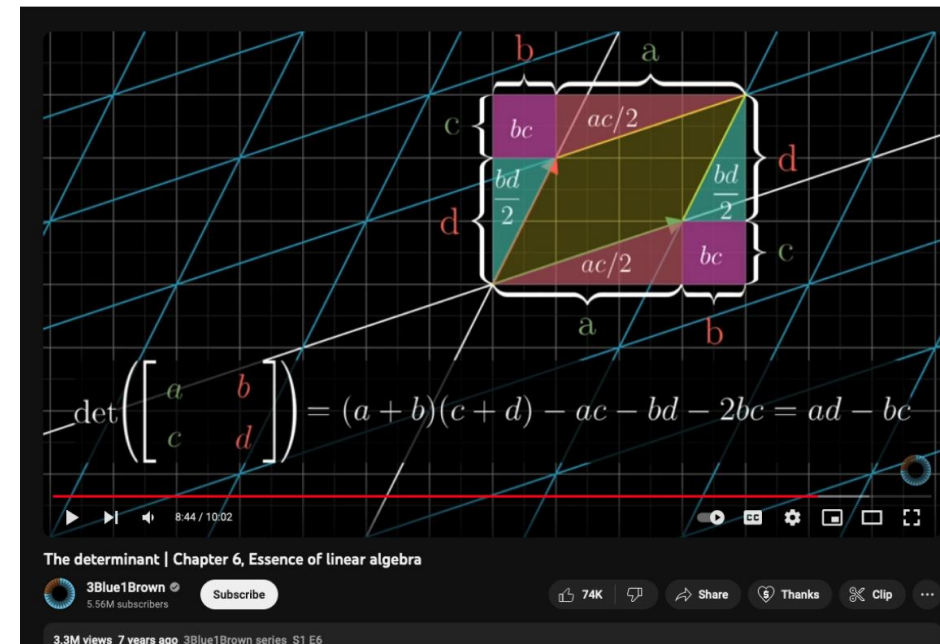
Determinanten

- Was ist die Determinante einer Matrix?
- Geometrische Vorstellung: Wenn wir die Matrix auf ein Objekt im Raum anwenden, wie sehr verändert sich die Fläche (in \mathbb{R}^2) /das Volumen (in \mathbb{R}^n)?

Determinant



Determinanten: 2x2 Matrizen



Definition 7.1.1. *Let*

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

The determinant of A is $\det(A) = ad - bc$.

Determinanten: 2x2 Matrizen

Lemma 7.1.2. *Let $A, W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Then $\det(AW) = \det(A) \det(W)$.*

Lemma 7.1.3. *A matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ is invertible if and only if $\det(A) \neq 0$.*

Determinanten: Eigenschaften

Theorem 7.2.5. *Given a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, then*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Theorem 7.2.6.

- *A matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is invertible if and only if*

$$\det(A) \neq 0.$$

- *Given matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ we have*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

- *Given a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that $\det(A) \neq 0$, then A is invertible and*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Fragen?

Übungen

1. Gram-Schmidt (in-class) (★☆☆)

Consider the invertible matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

- a) Apply the Gram-Schmidt process to the columns of A .
- b) Write down a QR -decomposition of A .
- c) Apply the Gram-Schmidt process to the columns of B .
- d) Is it always true that the Gram-Schmidt process on the columns of an upper triangular $n \times n$ matrix with non-zero diagonal entries yields the canonical basis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$? Provide a proof or counterexample.

2. Characterizing solvability via nullspaces (bonus, hand-in) (★★☆)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ and $B \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$. Consider the system of linear equations

$$(EQ) \quad Ax + By = c, \quad c \in \mathbb{R}^m$$

where $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ and $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ are the unknown vectors. Show that the system has a solution (x, y) for every right-hand side $c \in \mathbb{R}^m$ if and only if the null spaces of A^\top and B^\top satisfy

$$\mathbf{N}(A^\top) \cap \mathbf{N}(B^\top) = \{0\}$$

Hint: Use Theorem 6.2.4. from the lecture notes.

Alte Prüfungsaufgaben

[k] [f] Gegeben sind die orthogonalen Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Markieren Sie für jede folgende Aussage, ob sie korrekt [k] oder falsch [f] ist.

- Die Matrix \mathbf{AB} ist orthogonal, aber \mathbf{BA} ist im Allgemeinen nicht orthogonal.
- Die Matrix \mathbf{BA} ist orthogonal, aber \mathbf{AB} ist im Allgemeinen nicht orthogonal.
- Die Matrix \mathbf{AB} und die Matrix \mathbf{BA} sind im Allgemeinen orthogonal.
- Die Matrix \mathbf{AB} und die Matrix \mathbf{BA} sind im Allgemeinen nicht orthogonal.

[k] [f] Markieren Sie für jede folgende Aussage, ob sie korrekt [k] oder falsch [f] ist.

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.
- Wir betrachten den Vektorraum \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt. Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren kann beliebig gross sein.
- Wir betrachten wieder \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt. Wir können eine beliebig grosse Menge von Vektoren in diesem Vektorraum finden, die paarweise orthogonal sind.

[k] [f] Gegeben sind die orthogonalen Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Markieren Sie für jede folgende Aussage, ob sie korrekt [k] oder falsch [f] ist.

- Die Matrix \mathbf{A}^\top ist orthogonal
- Die Matrix $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ist orthogonal
- Die Matrix $\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$ ist orthogonal
- Die Matrix $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ ist orthogonal

5. Let $A \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$ be arbitrary. Let A^\dagger be the pseudoinverse of A . Which of the following statements must be **true**? *Note: only one answer is correct.*

(a) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\dagger)$.

(b) $AA^\dagger = I$.

(c) $\text{rank}(A^\dagger) = 5$.

(d) $A^\dagger A = I$.

Mock exam 2024: https://ti.inf.ethz.ch/ew/courses/LA24/mock_exam.pdf