Bitte setzt euch in den vordersten drei Reihen!

Lineare Algebra

Übung 0, 18 September 2025

Annika Guhl, n.ethz.ch/~anguhl

Programm

- Vorstellung
- Wie funktionieren Übungsstunden?
- Organisatorische Infos zum Kurs und zu den Übungen
- Prüfungsinfos
- Tipps zur Vorlesung
- Wieso Lineare Algebra?
- Theorie-Input
- In-class Exercise

Wer bin ich?

- Annika Guhl
- 3. Semester Informatik-Bachelor
- Webseite: n.ethz.ch/~anguhl

Wer seid ihr?

- Wie heisst ihr?
- Was habt ihr vor dem Studium gemacht?

Wie funktionieren Übungsstunden?

- Kleinere Gruppen
- Wenige fixe Vorgaben zum Aufbau
- Möglichst interaktiv
- Ihr könnt mitentscheiden!
- Alle ca. 3 Wochen gibt es eine Umfrage, in der ihr Feedback zum Inhalt und Aufbau der Übungen geben könnt
- Alle Slides und Infos auf: n.ethz.ch/~anguhl

Stellt Fragen!

- Während der Übung
- In den Pausen
- Per Mail: anguhl@ethz.ch

Kursinfos

- Webseite: https://ti.inf.ethz.ch/ew/courses/LA25/index.html
- Moodle: https://moodle-app2.let.ethz.ch/course/view.php?id=26165
- Dozenten:
  - Prof. Dr. Bernd Gärtner
  - Prof. Dr. Robert Weismantel

Übungsserien

- Werden jeweils Mittwochs veröffentlicht
- Abgabe bis nächste Woche Dienstags

Assignment 0

Submission Deadline: **23 September, 2025** at 23:59

Course Website: https://ti.inf.ethz.ch/ew/courses/LA25/index.html

Exercises

You can get feedback from your TA for Exercise 1 by handing in your solution as pdf via Moodle before the deadline.

1. Linear combinations of vectors (hand-in) (★☆☆)

Assignments (beeinflussen die Note nicht)

- hand-in Übungen via moodle (entweder ein PDF mit Latex/ähnlichem oder von Hand); ihr bekommt Feedback von eurem TA
- Automatisch korrigierte Quizzes auf Moodle (unbegrenzte Versuche)

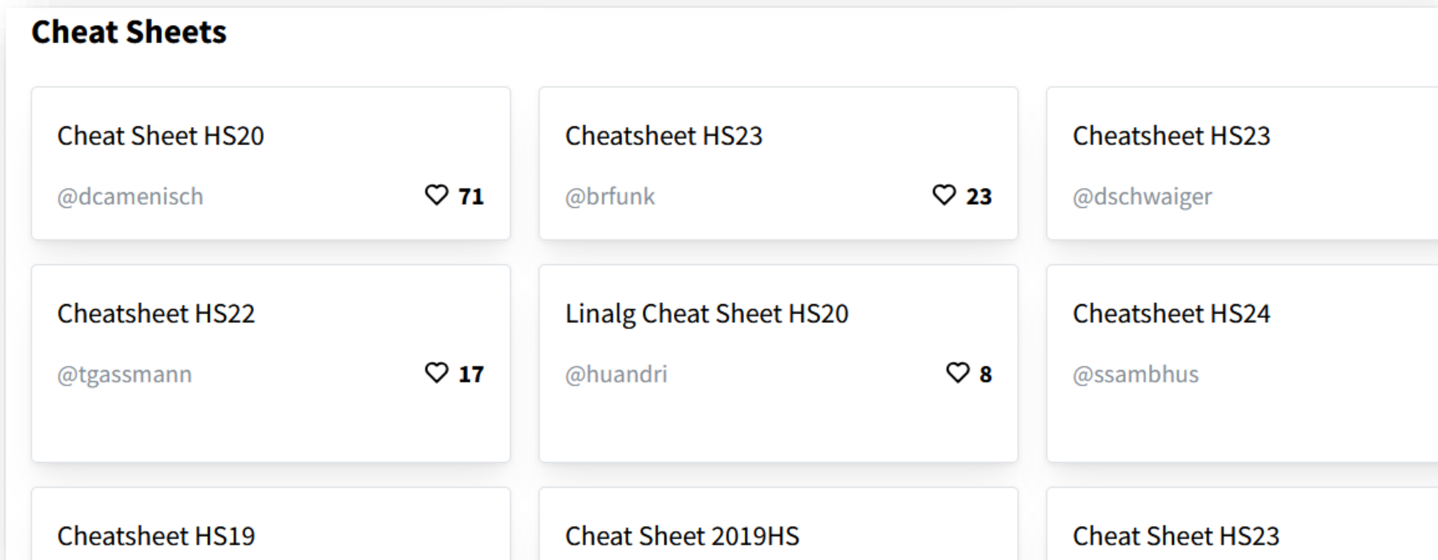
Bonus-Aufgabe

- Entweder ein automatisch korrigiertes Moodle-Quiz oder eine schriftliche Aufgabe
- Die 10 besten Bonus-Aufgaben geben einen Noten-Bonus bis zu 0.25

Fragen?

Prüfung

- Verfügbar in Englisch und Deutsch
- Ihr könnt 6 Seiten Zusammenfassung mitnehmen (Beispiele gibts auf der Prüfungssammlung vom VIS: https://exams.vis.ethz.ch/)
- Von Hand oder gedruckt
- Kein Taschenrechner!



Tipps für die Vorlesung

Passt auf, auch wenn ihr denkt, das Material schon zu kennen!

A vector is (for now) an element of $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ (natural numbers).

Definition 4.1 (Vector space). *A* vector space *is a triple* $(V, +, \cdot)$ *where* V *is a set (the vectors), and*

$$\begin{array}{rcll} + & : & V \times V \to V & \textit{is a function (vector addition),} \\ \cdot & : & \mathbb{R} \times V \to V & \textit{is a function (scalar multiplication),} \end{array}$$

satisfying the following axioms of a vector space *for all* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *and all* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1.	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$	*commutativity*
2.	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	*associativity*
3.	*There is a vector* $\mathbf{0}$ *such that* $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ *for all* $\mathbf{v}$	*zero vector*
4.	*There is a vector* $-\mathbf{v}$ *such that* $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$	*negative vector*
5.	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$	*identity element*
6.	$(\lambda \cdot \mu)\mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$	*compatibility of* $\cdot$ *and* $\cdot$ *in* $\mathbb{R}$
7.	$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$	*distributivity over* $+$
8.	$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$	*distributivity over* $+$ *in* $\mathbb{R}$

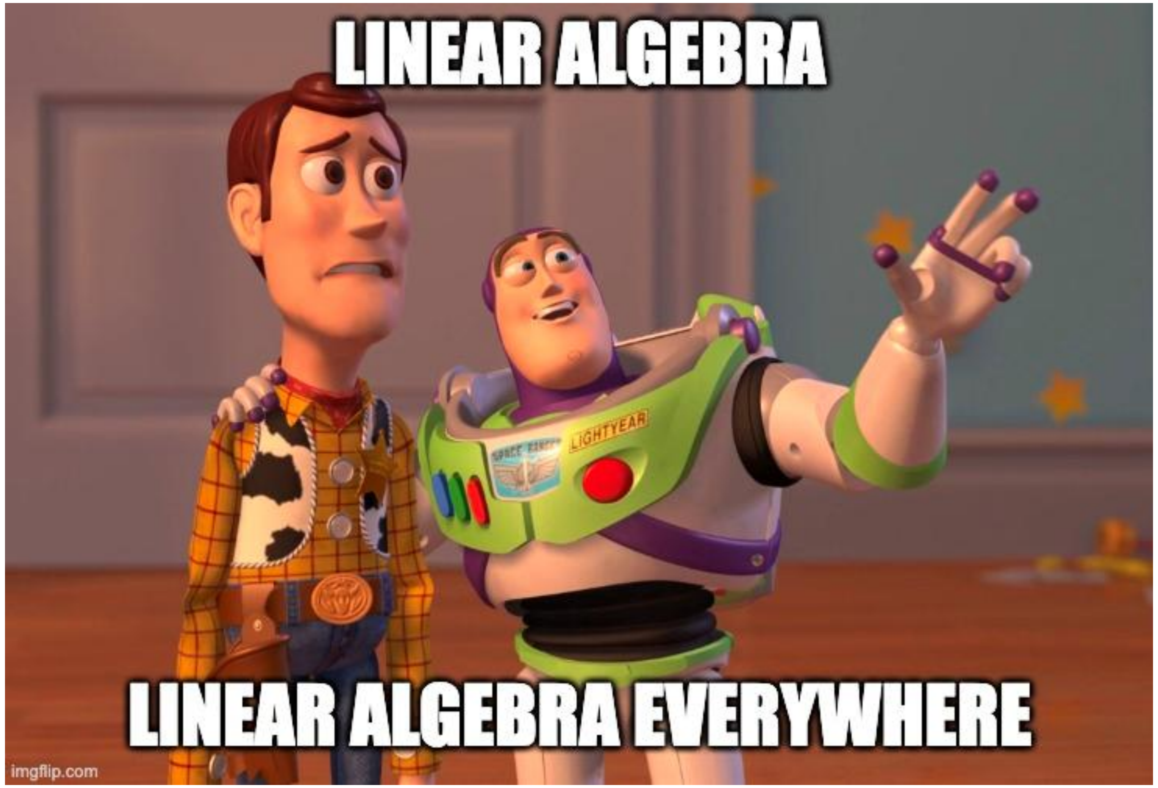
Tipps für die Vorlesung

- Löst die Übungsaufgaben!
- Geben Notenbonus
- Sind ideale Prüfungsvorbereitung
- Überprüfen, ob ihr den Stoff verstanden habt
- Möglichkeit, Feedback zu bekommen

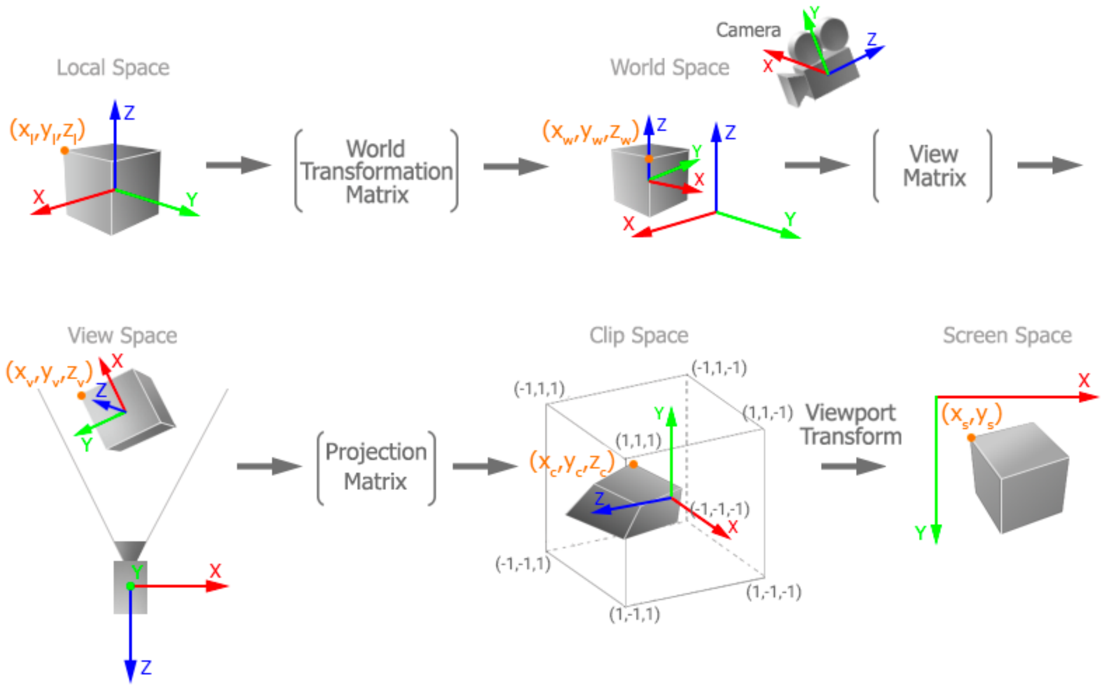
Fragen?

Wieso Lineare Algebra?

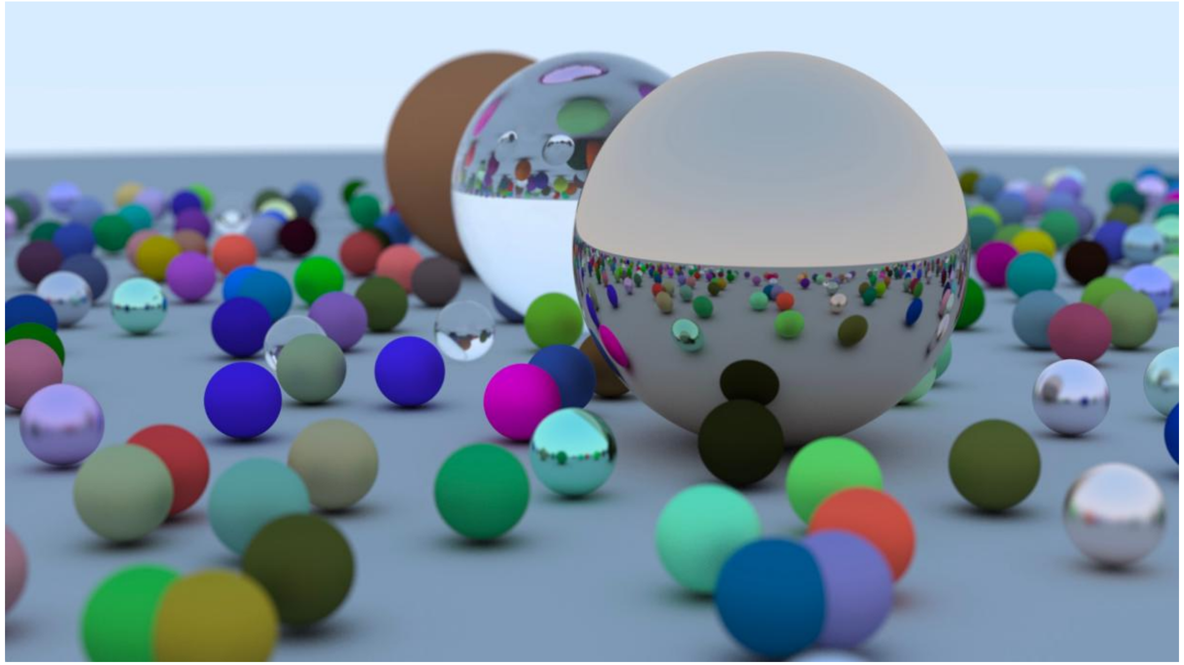
Linear Algebra



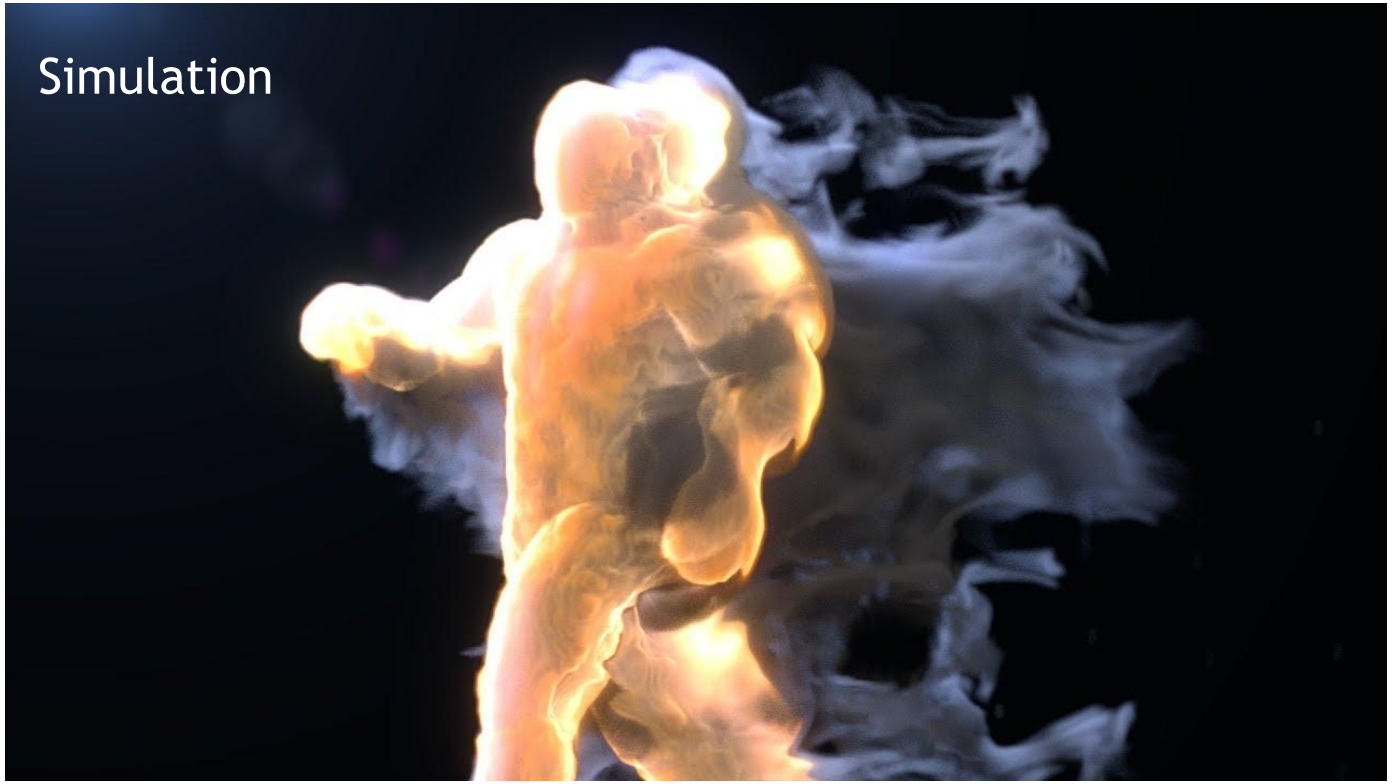
Graphics



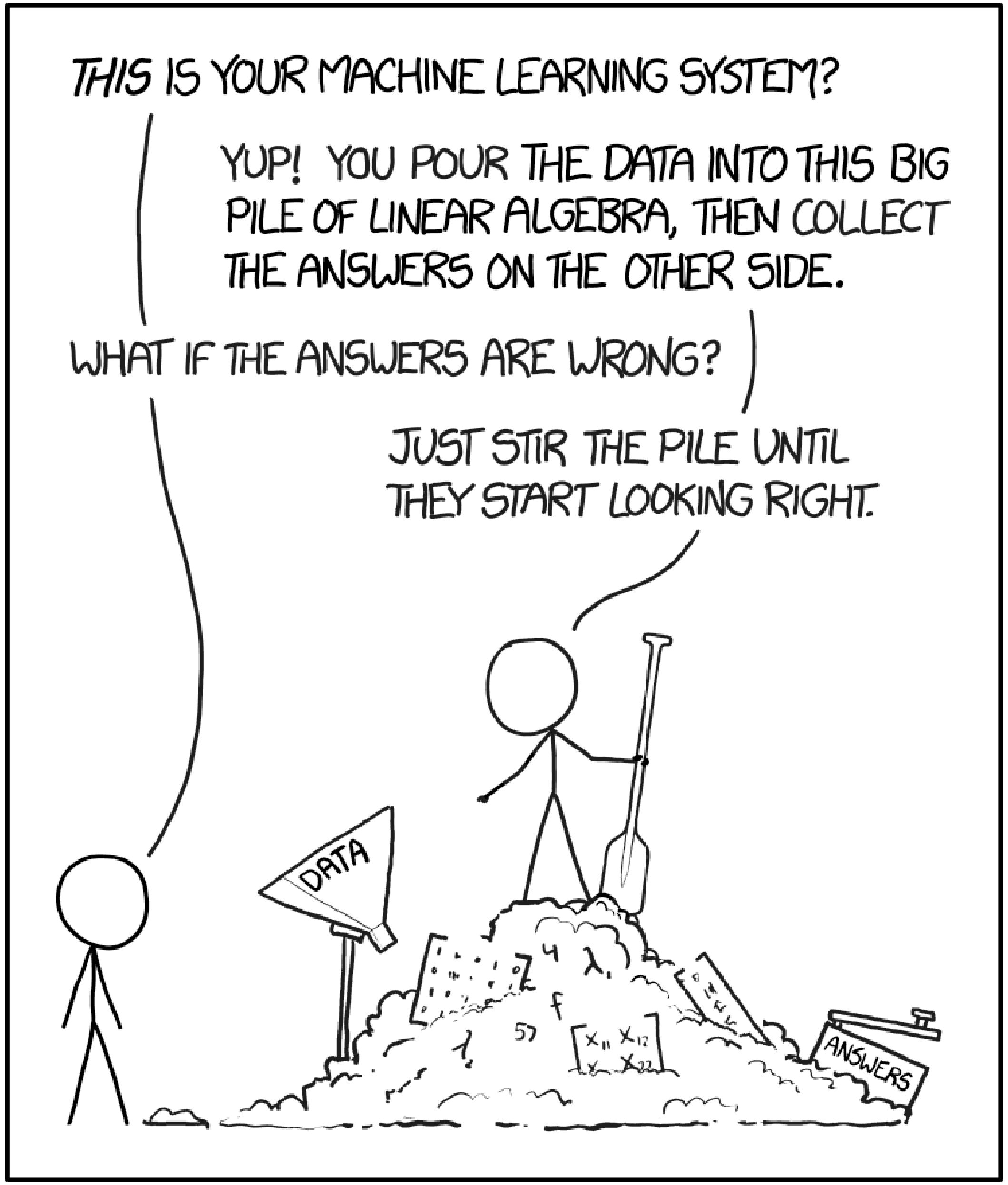
Local Space
(x_l, y_l, z_l)
World Transformation Matrix
World Space
Camera
(x_w, y_w, z_w)
View Matrix
View Space
(x_v, y_v, z_v)
Projection Matrix
Clip Space
(x_c, y_c, z_c)
(-1,1,1)
(-1,1,-1)
(1,1,-1)
(1,1,1)
(-1,-1,-1)
(-1,-1,1)
(1,-1,1)
(1,-1,-1)
Viewport Transform
Screen Space
(x_s, y_s)



More graphics



AI?



https://xkcd.com/1838

Im Studium: Konvexe Hülle

Im 2. Semester: Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Kleinste Punktemenge, so dass alle Punkte in der Hülle enthalten sind

Ausschnitt aus dem A&W Skript:

Offensichtlich ist die Frage, ob ein Punkt p links (oder rechts) von qr liegt für uns wichtig. Mit Hilfe der linearen Algebra und insbesondere Determinanten ist diese Frage algorithmisch aus den Koordinaten der Punkte leicht zu beantworten (hier ohne Beweis).

Lemma 3.35. Seien $p = (p_x, p_y)$, $q = (q_x, q_y)$, und $r = (r_x, r_y)$ Punkte in $\mathbb{R}^2$. Es gilt $q \neq r$ und p liegt links von qr genau dann, wenn

$$\det(p, q, r) := \begin{vmatrix} p_x & p_y & 1 \\ q_x & q_y & 1 \\ r_x & r_y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_x - p_x & q_y - p_y \\ r_x - p_x & r_y - p_y \end{vmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (q_x - p_x)(r_y - p_y) > (q_y - p_y)(r_x - p_x)$$

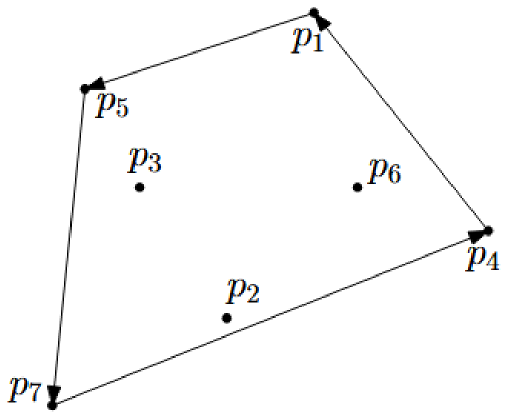
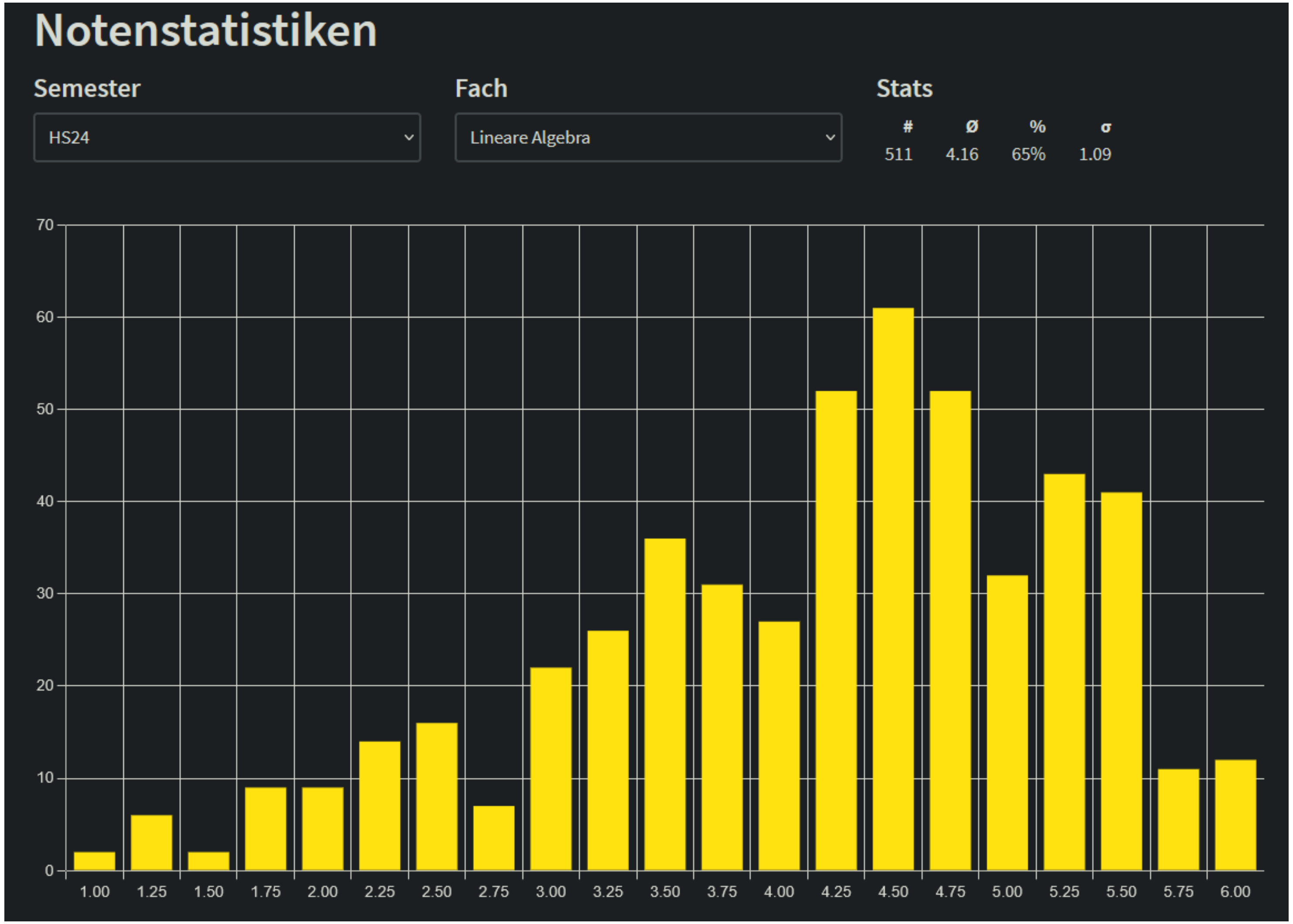


Abbildung 3.6: Punktemenge $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$ mit dem Polygon (p_4, p_1, p_5, p_7), welches $\operatorname{conv}(P)$ umrandet.

Prüfungsblock



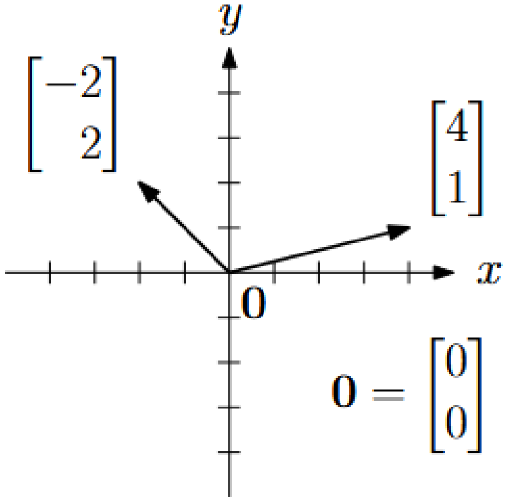
https://vis.ethz.ch/de/services/notenstatistiken/HS24/401-0131-00L/

Theorie

Definition eines Vektors

A vector is (for now) an element of $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ (natural numbers).

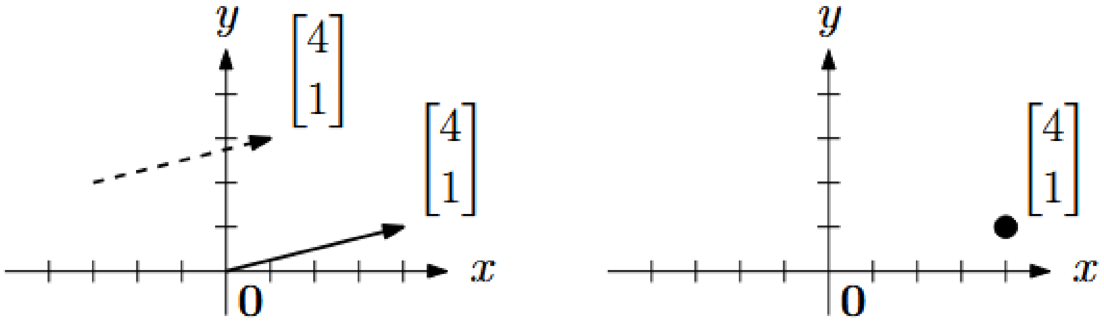
$\mathbb{R}^2$



$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^m$ (column vectors)

Drawing as arrow (movement) or point (location):



Definition aus dem
Lecture Plan Woche 0

Exkurs: Was ist $\mathbb{R}^m$?

- Menge aller Sequenzen von m reellen Zahlen
- Beispiel: $(94, 189) \subset \mathbb{R}^2$ kann für das Gewicht und die Grösse einer Person stehen
- Vektoren sind Elemente von $\mathbb{R}^m$, über die wir als Koordinaten denken
- Vektoren stellen wir als Spaltenvektoren dar

Exkurs: Was ist $\mathbb{R}^m$?

- Menge aller Sequenzen von m reellen Zahlen
- Vektoren sind Elemente von $\mathbb{R}^m$, über die wir als Koordinaten denken
- Kann $m = 0$ sein?
- Ja! Bei uns ist 0 in $\mathbb{N}$! (Achtung! Nicht in jedem Fach gleich!)
- Wenn $m = 0$, dann ist das einzige Element (), die leere Sequenz

Definition eines Vektors

A vector is (for now) an element of $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ (natural numbers).

Wie bezeichnen wir Vektoren?
Es gibt keine “richtige” oder “falsche” Schreibweise!
Verschiedene Dokumente verwenden verschiedene Notationen
Es ist wichtig, dass man konsistent bleibt!
Für diese Vorlesung:

$\mathbf{v}$ ✓ $\vec{v}$ ✗

Definition aus dem
Lecture Plan Woche 0

Nullvektor

The vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *is the* zero vector *in* $\mathbb{R}^m$, *denoted by* $\mathbf{0}$.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gibt es bessere Optionen? $\mathbf{0}_2, \mathbf{0}_3, \mathbf{0}_4$

Nicht unbedingt klarer, z.B. $\mathbf{0}_2$ sieht aus wie Sauerstoff!

Definition aus den Lecture Notes

Linearkombinationen

Definition 1.4 (Linear combination). *Let* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *The vector*

$$\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$$

is a linear combination *of* $\mathbf{v}$ *and* $\mathbf{w}$. *In general, if* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ *and* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, *then*

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$$

is a linear combination *of* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Definition aus den
Lecture Notes

Linearkombinationen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ist das eine Linearkombination?

$$-3\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$$

Definition aus den Lecture Notes

Linearkombinationen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ist das eine Linearkombination?

$$1\mathbf{v} - 1\mathbf{w}$$

Definition aus den
Lecture Notes

Linearkombinationen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ist das eine Linearkombination?

$$2\mathbf{v} - 4\mathbf{w}^2 \times$$

Definition aus den Lecture Notes

Linearkombinationen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ist das eine Linearkombination?

$$3\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$$

Definition aus den
Lecture Notes

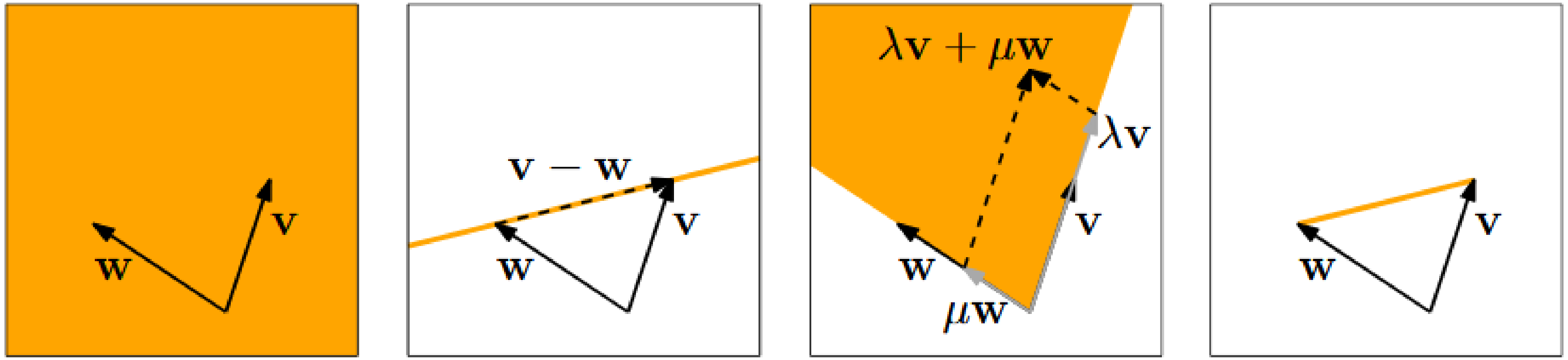
Spezielle Linearkombinationen

Definition 1.7 (Affine, conic, convex combination). *A linear combination* $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ *of vectors* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *is called*

(i) *an* affine combination *if* $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$,

(ii) *a* conic combination *if* $\lambda_j \geq 0$ *for* $j = 1, 2, \ldots, n$, *and*

(iii) *a* convex combination *if it is both an affine and a conic combination.*



(i) linear (ii) affine (iii) conic (iv) convex

Fragen?

Übungen

Übungen

2. The perfect long drink (in-class) (★☆☆)

a) Suppose that you would like to mix the perfect long drink from the two ingredients G and T. Your sources tell you that the perfect long drink is defined as 23ml of G and 77ml of T. Unfortunately, your friends already mixed two imperfect drinks: One with 15ml of G and 85ml of T, and another one with 35ml of G and 65ml of T. How can you use the two imperfect drinks to make one perfect drink?

b) One could model the set of all possible 100ml drinks mixed from G and T as

$$D := \{\begin{pmatrix} g \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : g + t = 100, g \geq 0, t \geq 0\}.$$

The two imperfect drinks are then represented by the vectors $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 85 \end{pmatrix} \in D$ and $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 35 \\ 65 \end{pmatrix} \in D$, respectively. Using this formulation, write down the set $\hat{D} \subseteq D$ of all 100ml drinks that you could mix from $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$. What geometric shape does this set have?

c) Finally, we consider the set $\overline{D}$ of drinks of any size that can be mixed from the two drinks $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$. What geometric shape does $\overline{D}$ have?

Übungen

3. Geometry of linear combinations (in-class) (★☆☆)

In this exercise, you are asked to sketch sets of points in $\mathbb{R}^3$. No formal justification is required.

a) Draw the set of linear combinations $\left\{\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \ : \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Draw the set of linear combinations $\left\{\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \ : \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

c) Draw the set of linear combinations $\left\{\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \ : \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

Übungen

a) Draw the set of linear combinations $\left\{\lambda_1 \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Draw the set of linear combinations $\left\{\lambda_1 \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

c) Draw the set of linear combinations $\left\{\lambda_1 \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

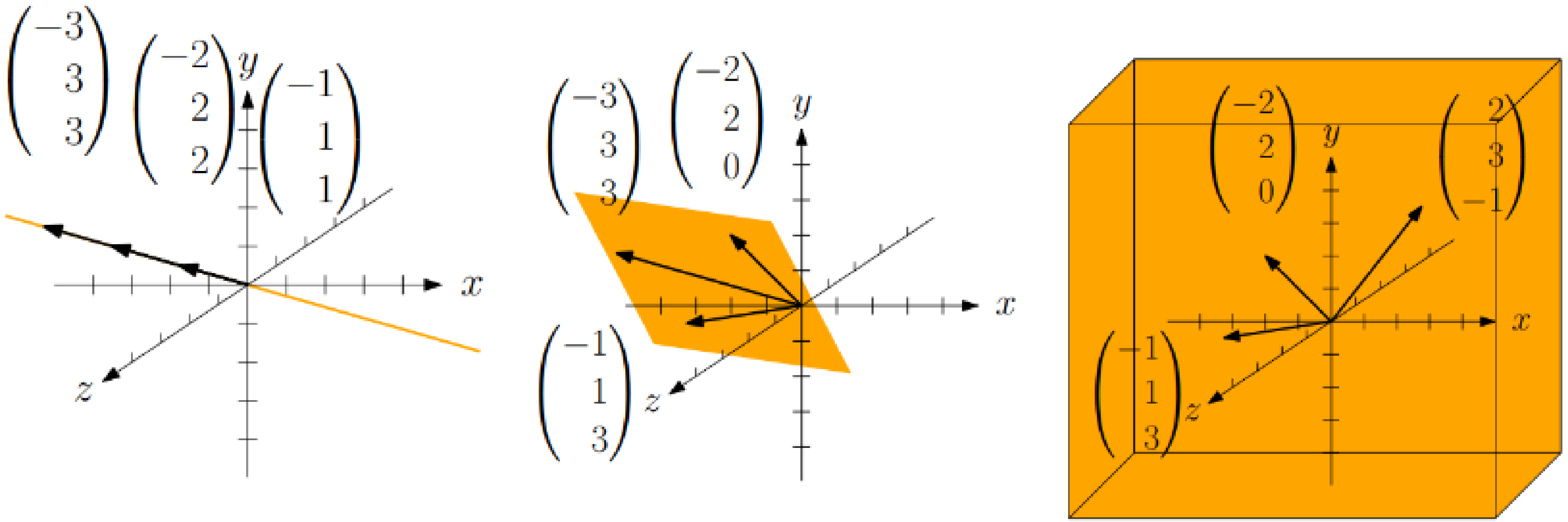


Figure 3: Solutions to 3a, 3b, and 3c, respectively.