Prüfungsaufgaben

5. Let $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$ be arbitrary. Let $A^\dagger$ be the pseudoinverse of A. Which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

√ **(a)** $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\dagger)$.

(b) $AA^\dagger = I$.

(c) $\operatorname{rank}(A^\dagger) = 5$.

(d) $A^\dagger A = I$.

Probeprüfung HS24

a) Beweis, dass $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^+)$

$\operatorname{rank}(A^+) \leq \operatorname{rank}(A)$

Sei $y \in C(A^+)$. Es existiert also $y = A^+x$ für ein x.

Es gilt:

$$A^+Ay = A^+AA^+x \overset{\text{Theorem 6.4.10}}{=} A^+x = y$$

Es gilt also:

$$y = A^+Ay \overset{\text{Theorem 6.4.10}}{=} (A^+A)^T y = A^T \overbrace{(A^+)^T y}^{\text{Vektor}}$$

Also ist y eine Linearkombination der Spalten von A^T, also $y \in C(A^T)$. Daraus folgt:

$$C(A^+) \subseteq C(A^T) \Rightarrow \dim(C(A^+)) \leq \dim(C(A^T)) \Rightarrow \operatorname{rank}(A^+) \leq \operatorname{rank}(A^T).$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A^+) \leq \operatorname{rank}(A)$$

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$, Theorem 4.33

$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A^+)$

Sei $y \in C(A)$. Es existiert also $y = Ax$ für ein x.

Es gilt:

$$A A^+ y \overset{\text{Theorem 6.4.10}}{=} A A^+ A x$$

$$= A x = y$$

(AA^+ ist Projektionsmatrix auf $C(A)$)

Daraus folgt:

$(A A^+ y)^T = y^T$ — Auf beiden Seiten transponieren

$\Rightarrow y^T (A A^+)^T = y^T$ — $(Cx)^T = x^T C^T$

$\Rightarrow y^T A A^+ = y^T$ — $(AA^+)^T = AA^+$ (Theorem 6.4.10)

$\Rightarrow (y^T A A^+)^T = (y^T)^T$ — beide Seiten transponieren

$\Rightarrow (A A^+)^T y = y$ — $(Cx)^T = x^T C^T$

$\Rightarrow (A^+)^T \overbrace{A^T y}^{\text{Vektor}} = y$ — $(CB)^T = B^T C^T$

$\Rightarrow y \in C((A^+)^T) \Rightarrow y \in R(A^+)$

Daraus folgt:

$C(A) \subseteq R(A^+) \Rightarrow \dim(C(A)) \leq \dim(R(A^+))$

$\Rightarrow \text{rank}(A) \leq \text{rank}(A^+)$

$\dim(C(A)) = \text{rank}(A)$ laut Theorem 4.31

$\dim(R(A^+)) = \text{rank}(A)$ wegen Theorem 4.32

5. Let $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$ be arbitrary. Let $A^\dagger$ be the pseudoinverse of A. Which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

√ **(a)** $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\dagger)$.

(b) $AA^\dagger = I$.

(c) $\operatorname{rank}(A^\dagger) = 5$.

(d) $A^\dagger A = I$.

b) Sei $A = 0$

Egal was A^+ ist, $AA^+ \neq I$, da $0A^+ = 0$

c) Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix}$. $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^+ = R^T (C^T A R^T)^{-1} C^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

A^+ hat Rang 1, also $\operatorname{rank}(A^+) = 5$ gilt nicht immer.

d) Wenn $A = 0$, ist $A^+ A = 0 \neq I$.

Gegeben sind die vier Punkte

HS 20

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1) &= (1, 5),\\
(x_2, y_2) &= (2, 3),\\
(x_3, y_3) &= (3, 1),\\
(x_4, y_4) &= (4, 4).
\end{aligned}
$$

a) Berechnen Sie die Koeffizienten des Polynoms $f(x) = a_0 + a_1 x$ mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, so dass die vertikalen Abstände (gestrichelte Linien in der Abbildung) zwischen den Datenpunkten (x_j, y_j) und dem Graphen von $f(x)$ im Sinne der kleinsten Quadrate minimiert werden: /12

$$\underset{a_0, a_1}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^{4} (f(x_j) - y_j)^2.$$

Show Answers

b) Nehmen wir an, wir möchten die gegbenen Punkte mit einem Polynom $g(x) = b_0 + b_1 x$ annähren wie in Aufgabenteil **a)**. Allerdings soll die Approximation beim Punkt $(x_2, y_2) = (2, 3)$ exakt sein, das heisst $g(x_2) = y_2$. Leiten Sie das dazu passende lineare Gleichungssystem her und berechnen Sie die Lösung b_0, b_1. /8

Hinweis: Das gesuchte lineare Gleichungssystem enthält nur noch eine Variable.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalengleichung:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 6 + 3 + 16 \\ 5 + 3 + 1 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{-9}{-2} = \underline{\underline{4.5}}$$

$$\Rightarrow 10\alpha_1 + 4 \cdot \frac{9}{2} = 13 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-5}{10} = \underline{\underline{-0.5}}$$

b) Es gilt: $b_0 + b_1 \cdot 2 = 3 \Rightarrow b_0 = 3 - 2b_1$

$$\Rightarrow g(x) = b_0 + b_1 x$$
$$= 3 - 2b_1 + b_1 x$$
$$= 3 + b_1(x-2)$$

$$\Rightarrow y - 3 = b_1(x-2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x-2} (b_1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y-3}$$

$$\Rightarrow [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} (b_1) = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2] \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 6 (b_1) = -2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b_1 = -\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b_0 = \frac{11}{3}}}$$