Beispiel Eigenwertzerlegung

8.2.3 Musterbeispiel zum Kochrezept

Musterbeispiel 8.1 (Orthogonale Diagonalisierung/Spektralsatz über $\mathbb{R}$)
Betrachte die folgende **symmetrische** (2×2)-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Wir führen die orthogonale Diagonalisierung von $\boldsymbol{A}$ gemäß Kochrezept 8.1 durch.

Schritt 1: Wir beginnen mit dem Bestimmen der Eigenwerte und Eigenräume von $\boldsymbol{A}$. Das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{A}$ bestimmen wir wie gewohnt:

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-5) - 9$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 24 = (\lambda - 6)(\lambda + 4) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -4\,.$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind somit $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -4$.

Dann bestimmen wir eine Basis der zugehörigen Eigenräume:

- Eigenraum zu $\lambda_1 = 6$: Wir lösen das LGS $(\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3-6 & 3 & 0 \\ 3 & 5-6 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -9 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{3(Z_2)+(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_6(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- Eigenraum zu $\lambda_2 = -4$: Für den zweiten Eigenwert lösen wir $(\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3+4 & 3 & 0 \\ 3 & 5+4 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)-3(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_{-4}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Schritt 2: Wir bestimmen nun eine ONB für die verschiedenen Eigenräume. In diesem Fall werden die zwei Eigenräume jeweils nur aus einem einzigen Eigenvektor aufgespannt. Somit genügt es, diese Vektoren zu normieren:

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{||\boldsymbol{v_1}||} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{v_2}}{||\boldsymbol{v_2}||} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wichtig! Reihenfolge: $\boldsymbol{e_1}$ gehört zu $\lambda_1 = 6$, $\boldsymbol{e_2}$ zu $\lambda_2 = -4$.

Schritt 3: Die gesuchte orthogonale Transformationsmatrix $\boldsymbol{Q}$ lautet somit:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} | & | \\ \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

und es gilt

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{Q}^T} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T.$$

Machen Sie die Probe!

8

Beispiel Positiv Semidefinit

Wir berechnen die Eigenwerte von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Das charakteristische Polynom von A ist:

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-3)$$

Also sind die Eigenwerte von A $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Da $\lambda_1 < 0$, ist A nicht positiv definit oder semidefinit.

Beispiel SWZ

9.2.5 Übungen

Übung 9.1

● ○ ○ Man bestimme die SWZ der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösung:

Schritt 1: Wir berechnen $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Beachte, dass $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist (wie erwartet!). Dann führen wir die orthogonale Diagonalisierung von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ durch. Dazu berechnen wir die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$. Um diese Eigenwerte zu bestimmen, lösen wir die charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-8) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 2\,.$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ sind (in fallender Ordnung)

$$\lambda_1 = 8 > \lambda_2 = 2.$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat folglich $r = 2$ Singulärwerte

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}\,.$$

Die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ lautet

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Nun berechnen wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$:

- Eigenraum zu $\lambda_1 = 8$: Für $\lambda_1 = 8$ lösen wir das LGS $\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5-8 & 3 & 0 \\ 3 & 5-8 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)+(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_8(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$: Wir lösen das LGS $\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5-2 & 3 & 0 \\ 3 & 5-2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)-(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Die gefundenen Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ sind orthogonal zueinander (wie erwartet aus dem Spektralsatz). Wir normieren einfach noch die gefundenen Eigenvektoren:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

und erhalten damit die gesuchte orthogonale Matrix $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Schritt 2: Jetzt machen wir einfach dasselbe Spiel mit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Es gilt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wie erwartet ist $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ ebenfalls symmetrisch. Da $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ bereits diagonal ist, können wir die Eigenwerte und Eigenvektoren direkt ablesen. Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ sind $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 2$ (gleich wie $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$) und die zugehörigen Eigenvektoren folglich

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da diese Eigenvektoren bereits orthonormal sind, erhalten wir die gesuchte orthogonale Matrix $\boldsymbol{U}$ als:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Schritt 3: Die gesuchte SWZ von $\boldsymbol{A}$ lautet somit:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}^T}.$$

■

1. A positive semidefinite matrix (in-class) (★☆☆)

Let $n \in \mathbb{N}^+$ and let $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that $S^\top = -S$. Prove that $-S^2$ is symmetric and positive semidefinite.

Symmetrisch: $A^T = A$.

Wir wollen also zeigen, dass $(-S^2)^T = -S^2$ gilt.

$$(-S^2)^T = -(S^2)^T = -(S^T S^T)$$
$$= -(-S \cdot -S)$$
$$= -S^2$$

Proposition 9.2.12. *A symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is Positive Semidefinite if and only if $x^\top Ax \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. Analogously, a symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is Positive Definite if and only if $x^\top Ax > 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Positiv Semidefinit: $x^T A x \geq 0$

Wir wollen also zeigen, dass $x^T(-S^2)x \geq 0$ für alle x.

$$x^T(-S^2)x = x^T(-S)Sx$$
$$= x^T S^T S x$$
$$= (Sx)^T Sx$$
$$= \|Sx\|^2 \geq 0$$

Sonstige Aufgaben

Übung 8.6

• • ○ Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Man zeige: Lässt sich $\boldsymbol{A}$ wie folgt darstellen:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T,$$

wobei $\boldsymbol{Q}$ orthogonal und $\boldsymbol{D}$ diagonal ist, so muss $\boldsymbol{A}$ **notwendigerweise symmetrisch** sein.

Lösung

Aus $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T$ folgt

$$\boldsymbol{A}^T = \left(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T\right)^T = \left(\boldsymbol{Q}^T\right)^T \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{A}.$$

Somit ist $\boldsymbol{A}$ symmetrisch. Dabei haben wir die Formeln $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ und $\left(\boldsymbol{B}^T\right)^T = \boldsymbol{B}$ benutzt, sowie die Tatsache, dass für Diagonalmatrizen $\boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{D}$ gilt. ■

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2-\lambda & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\alpha^2-\lambda)(1-\lambda)-\alpha^2 = \lambda^2-(2+\alpha^2)\lambda+1\,.$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{2+\alpha^2 \pm \sqrt{(2+\alpha^2)^2-4}}{2} = \frac{2+\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4+4\alpha^2}}{2} = \frac{2+\alpha^2 \pm \alpha\sqrt{\alpha^2+4}}{2}.$$

Beachte, dass $\lambda_{1,2} > 0$. Die Singulärwerte von $\boldsymbol{A}$ sind

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{\frac{2+\alpha^2 \pm \alpha\sqrt{\alpha^2+4}}{2}}\,.$$

■

In den folgenden beiden wichtigen Beispielen zeigen wir die SWZ an nichtquadratischen Matrizen.

9

Übung 9.3

● ○ ○ Man bestimme die SWZ der (2×3)-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung

Wir gehen wie in der vorausgegangenen ▶ Übung 9.1 vor.

Schritt 1: Wir berechnen $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wie erwartet erhalten wir eine symmetrische (3×3)-Matrix. Dann bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$. Das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ ist:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-(1-\lambda) = (1-\lambda)\big[(1-\lambda)(2-\lambda)-1\big] \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0\,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ sind somit (in fallender Ordnung)

$$\lambda_1 = 3 > \lambda_2 = 1 > \lambda_3 = 0.$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat folglich $r = 2$ Singulärwerte

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3} > \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$$

und die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ ist eine (2×3)-Matrix:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Als Nächstes bestimmen wir die zugehörigen Eigenvektoren.

- Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$: Für $\lambda_1 = 3$ lösen wir das LGS $\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{2(Z_2)-(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{(Z_3)+(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Wir erhalten den Eigenraum:

$$\mathrm{Eig}_3(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$: Wir lösen das LGS $\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_3)-(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_1(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- Eigenraum zu $\lambda_3 = 0$: Wir lösen das LGS $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)+(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_3)+(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Der dritte Eigenraum ist:

$$\text{Eig}_0(A^TA) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Wir normieren die gefundenen Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

und erhalten die orthogonale Matrix V:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Schritt 2: Analog bilden wir AA^T:

$$AA^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wie erwartet ist AA^T eine symmetrische (2×2)-Matrix. Das charakteristische Polynom von AA^T ist

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1\,.$$

Die Eigenwerte von A^TA sind (in fallender Ordnung)

$$\lambda_1 = 3 > \lambda_2 = 1\,.$$

Dadurch erhalten wir dieselben Singulärwerte wie oben: $\sigma_1 = \sqrt{3}$ und $\sigma_2 = 1$. Nun bestimmen wir die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren von AA^T:

- <u>Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$:</u> Wir lösen das LGS $\left(AA^T - 3E\right) v = \mathbf{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)-(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = Z.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_3(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$: Wir lösen wieder das LGS $\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)+(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Die normierten Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ sind

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

und wir erhalten die gewünschte orthogonale Matrix $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Schritt 3: Die gesuchte SWZ von $\boldsymbol{A}$ lautet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}^T}.$$

Machen Sie die Probe! ■

Bemerkung

Die Berechnungen mit $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ ergeben immer dieselben Singulärwerte! Dies liegt daran, dass $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ dieselben „Nicht-Null"-Eigenwerte besitzen. Genau aus diesem Grund genügt es, die Berechnung der Singulärwerte nur einmal durchzuführen, entweder mit $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ oder mit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$.

Übung 9.7

●○○ Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeige, dass $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ dieselben „Nicht-Null"-Eigenwerte besitzen.

Lösung

Nehmen wir an, dass $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist. Das heißt:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}\,.$$

Multiplizieren wir nun alles von links mit der Matrix $\boldsymbol{A}$, erhalten wir

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\lambda\,\boldsymbol{v} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) = \lambda\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})\,.$$

Was besagt diese Gleichung? Diese Gleichung besagt, dass $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ zum Eigenwert λ ist (vorausgesetzt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$).

Nun nehmen wir an, dass $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}\,.$$

Jetzt multiplizieren wir alles von links mit $\boldsymbol{A}^T$ und erhalten

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T\lambda\,\boldsymbol{v} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}) = \lambda\,(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v})\,.$$

Daraus folgt, dass $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert λ ist (angenommen $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$).

Somit haben wir gezeigt, dass $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ dieselben Nicht-Null-Eigenwerte haben. ■