

- (b) Für die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer Matrix \mathbf{A}^{2k} mit $k \in \mathbb{N}$ nicht negativ sind.

/7

- c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

/7

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Werten Sie dazu die Nullstellen des charakterischen Polynoms aus.

Proposition 8.3.1.

- (a) If λ and v are an eigenvalue-eigenvector pair of a matrix A , then, for $k \geq 1$, λ^k and v are an eigenvalue-eigenvector pair of the matrix A^k .
- (b) Let A be an invertible matrix. If λ and v are an eigenvalue-eigenvector pair of the matrix A , then, $\frac{1}{\lambda}$ and v are an eigenvalue-eigenvector pair of the matrix A^{-1} .

$$b) \quad p(\lambda) = (-1)^2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda + 3 &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} \\ &= 2 \pm \frac{\sqrt{4}}{2} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 1, \quad \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

Zusätzlich: Finde Eigenvektoren zu λ_1, λ_2 . Was sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten von λ_1, λ_2 ?

- $\lambda_1 = 1$: Da die Nullstelle $\lambda_1 = 1$ nur einmal in $P(A)$ vorkommt, ist die algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen nun $N(A - I)$:

$$(A - I)v = 0$$

Wir wenden den Gauss-Algorithmus an auf $[A - E | 0]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = -v_2$$

$$\text{Also ist } N(A - I) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ ist also $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, und

da $\dim(N(A - I)) = 1$, ist die geometrische Vielfachheit 1.

- $\lambda_2 = 3$: Da die Nullstelle $\lambda_2 = 3$ nur einmal in $P(A)$ vorkommt, ist die algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen nun $N(A - 3I)$:

$$(A - 3I)v = 0$$

Wir wenden den Gauss-Algorithmus an auf $[A - 3E | 0]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow -v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

$$\text{Also ist } N(A - 3I) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3$ ist also $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und

da $\dim N(A - 3I) = 1$, ist die geometrische Vielfachheit 1.

2.1.6 Musterbeispiel zum Kochrezept

Musterbeispiel 2.1 (Diagonalisierung)

Betrachte die folgende (2×2) -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar über \mathbb{R} ? Wir gehen gemäß ► Kochrezept 2.2 vor.

Schritt 1: Wir bestimmen die Eigenwerte und Eigenräume von A mit den Methoden von ► Abschn. 1.2. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1).$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d. h.

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1.$$

λ_1 und λ_2 sind einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms, somit haben beide Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1. Also ist A diagonalisierbar. Nun bestimmen wir die zugehörigen Eigenräume:

– Eigenraum zu $\lambda_1 = 4$: Wir lösen das LGS $(A - 4E)v = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-4 & 2 & 0 \\ 3 & 2-4 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(Z_2) + (Z_1)} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \mathbf{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\text{Eig}_4(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\lambda_1 = 4$ hat geometrische Vielfachheit 1.

– Eigenraum zu $\lambda_2 = -1$: Für den zweiten Eigenwert lösen wir $(A + E)v = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{2(Z_2) - 3(Z_1)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \mathbf{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\text{Eig}_{-1}(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\lambda_2 = -1$ hat geometrische Vielfachheit 1.

Schritt 2: Ist A diagonalisierbar? Es gilt:

- A hat zwei Eigenwerte in \mathbb{R} ✓
- Für beide Eigenwerte stimmen die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten überein:

Algebraische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1 =$ Geometrische Vielfachheit von λ_1 ✓

Algebraische Vielfachheit von $\lambda_2 = 1 =$ Geometrische Vielfachheit von λ_2 ✓

Nach ► Satz 2.2 ist A diagonalisierbar. Wir können somit mit dem nächsten Schritt des Kochrezeptes weiterfahren.

Schritt 3: Die Transformationsmatrix P besteht aus allen Eigenvektoren und sieht folgendermaßen aus:

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Somit ist

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=D} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}}_{=P^{-1}} = PDP^{-1},$$

was äquivalent ist zu

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}}_{=P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{=P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=D}.$$

Machen Sie die Probe!

► Bemerkung

Es ist dem Leser überlassen, mit welchen Methoden er jeweils in Zukunft die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume/Eigenvektoren bestimmt (Sarrus, Laplace-Entwicklung, Gauß-Algorithmus oder andere Spezialmethoden aus den vorausgegangenen Kapiteln oder Band I).

► Bemerkung

Die Diagonalisierung ist **nicht eindeutig**. Wir können zum Beispiel die Reihenfolgen der Eigenwerte in der Matrix D ändern. Wichtig ist, dass die Eigenwerte in D und die entsprechenden Eigenvektoren in P in der gleichen Reihenfolge vorliegen:

1. Eigenvalues and eigenvectors (in-class) (★☆☆)

- a) Let $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ be such that $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. Find all real eigenvalues of A .
For each real eigenvalue, find a corresponding real eigenvector of A .
- b) Construct a square matrix A with eigenvalues 0, 1, 2. Furthermore, these should be the only eigenvalues of A .
- c) Construct a square matrix B with eigenvalues 0, 1, 2 such that B is not a diagonal matrix. As before, these should be the only eigenvalues of B .

a) Wir haben $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Das charakteristische Polynom ist

$$P(A) = \lambda^2 - 1$$

$$\text{als } P(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Eigenvektoren zu $\lambda = 1$:

$$(A - E)v = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda = -1$:

$$(A + E)v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Ausprobieren/ sehen

b) Einfachste Möglichkeit:

Example 9.1.4. For $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonal matrix, the eigenvalues of D are the diagonal entries of D . The canonical basis e_1, \dots, e_n is a complete set of real eigenvectors of D .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es gilt: $Ae_1 = 0e_1$, $Ae_2 = 1e_2$, $Ae_3 = 2e_3$

Also hat A die getragten Eigenwerte und keine mehr, da eine 3×3 Matrix höchstens 3 Eigenwerte hat.

c) Erinnerung: Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte.

Wir können eine beliebige Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von \mathbb{R}^3 wählen, mit

$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$. Wir können $B = VAV^{-1}$ setzen:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Da A und B ähnlich sind, haben sie die gleichen Eigenwerte.

2. Eigenvalues and eigenvectors of AB and BA (★★☆)

Let A, B be two matrices in $\mathbb{R}^{n \times n}$.

- Let $\lambda \in \mathbb{R}$ be a real eigenvalue of AB . Prove that λ is a real eigenvalue of BA .
- Assume that B is invertible and that AB has a complete set of real eigenvectors (according to Definition 8.2.1). Prove that BA has a complete set of real eigenvectors.
- Assume that both A and B are invertible. Prove that AB has a complete set of real eigenvectors if and only if BA has a complete set of real eigenvectors.
- Can you find an example of two matrices A and B such that BA has a complete set of real eigenvectors, but AB does not have a complete set of real eigenvectors?

a) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Das bedeutet $v \neq 0$.

Falls $\lambda \neq 0$: $Bv \neq 0$ da sonst $ABv = A0 = 0$,

was nicht sein kann, da $\lambda \neq 0$. Also folgt:

$$(BA)Bv = B(AB)v = B\lambda v = \lambda Bv$$

wobei $Bv \neq 0$, also ist λ ein Eigenwert von BA mit Eigenvektor Bv .

Falls $\lambda = 0$: Da $\det(AB) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, muss $\det(AB) = 0$.

Da $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA) = 0$, muss auch

$0 = \det(BA) = \prod_{i=1}^n \mu_i$, also muss ein Eigenwert von BA 0 sein.

b) Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ die vollständige Menge von Eigenvektoren von AB .

Aus a) und da B invertierbar ist, folgt, dass

$Bv_1, \dots, Bv_n \in \mathbb{R}^n$ alle reellen Eigenvektoren von BA sind.

Zusätzlich, da v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind und B invertierbar,

folgt dass Bv_1, \dots, Bv_n linear unabhängig sind. ← Vies?

Also können Bv_1, \dots, Bv_n eine Basis von \mathbb{R}^n , sind also eine

vollständige Menge reeller Eigenvektoren von BA .

c) Aus b) wissen wir, dass

AB hat vollständige Menge reelles Eigenvektoren

$\Rightarrow BA$ hat vollständige Menge reelles Eigenvektoren

Wenn wir A und B tauschen und b) anwenden, erhalten wir die andere Richtung der Implikation.

d) Aus b) schließen wir, dass A nicht invertierbar sein kann.

Betrachte $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mit

$$AB = \begin{bmatrix} c & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

BA hat eine vollständige Menge reelles Eigenvektoren, da der Eigenwert $\lambda=0$ algebraische Vielfachheit 2 hat und $\dim(N(BA - 0I)) = 2$.

AB hat jedoch keine vollständige Menge reelles Eigenvektoren, da der Eigenwert $\lambda=0$ algebraische Vielfachheit 2 hat, aber $\dim(N(AB - 0I)) = 1$.

[k] [f] Eine normierte Eigenzerlegung einer Matrix ist die Menge ihrer Eigenwerte mit zugehörigen normierten Eigenvektoren. Zwei Zerlegungen, die sich nur durch ihre Reihenfolge unterscheiden, betrachten wir als identisch.

- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine eindeutig bestimmte normierte Eigenzerlegung.
- Eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine eindeutig bestimmte normierte Eigenzerlegung.
- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat n verschiedene normierte Eigenzerlegungen.
- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten hat 2^n verschiedene normierte Eigenzerlegungen.

Probleme 1-3: Falls $N(A - \lambda I)$ mehrdimensional ist, gibt es unendlich viele Basen

Bei normierten Eigenvektoren gibt es 2 Möglichkeiten: v oder $-v$

4. Eigen- und Singulärwertzerlegung Gegeben sind die orthonormierten Eigenvektoren

/20

$$v_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0.$$

a) Konstruieren Sie die Matrix A , die die angegebene Eigenzerlegung besitzt.

/6

b) Geben Sie die Determinante der Matrix an.

/3

c) Zeigen Sie, dass der Vektor $(16 \ 2 \ 8)^T$ Teil des Kerns von A ist.

/5

4. a) Da die Vektoren orthonormiert sind, lässt sich die Matrix durch ausmultiplizieren berechnen:

$$\begin{aligned} A &= [v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} [v_1 \ v_2 \ v_3]^T \\ &= \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -15 & 24 & 24 \\ 24 & 48 & -60 \\ 24 & -60 & 33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Die Determinante ergibt sich als Produkt der Eigenwerte und ist damit 0.

c) Der gegebene Vektor ist das 18-fache von v_3 und damit Teil des Eigenraumes zum Eigenwert 0. Alternativ kann der Vektor mit der in a) konstruierten Matrix multipliziert werden.

Lösungen zu Aufgaben aus Prüfungstrainer Lineare Algebra sind im Buch (Link jeweils auf den Dateien)