Beispiel Determinante mit Kofaktoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = A_{11} \cdot C_{11} + A_{12} C_{12} + A_{13} C_{13} + A_{14} C_{14}$$

$$= C_{11} + 3 C_{13}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-2 \cdot 0 \cdot 2) + 0 \cdot 1 \cdot 4$$

$$- 4 \cdot 2 \cdot 2 - (-2 \cdot 0 \cdot 2) - 0 \cdot 1 \cdot 4$$

$$= -16$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Also ist $\det(A) = -16$

Wir merken: Die Berechnung wird einfacher, je mehr Nullen wir in der Zeile haben. Also, wenn wir entlang der 3. Zeile entwickeln, müssen wir nur eine 3x3 Determinante ausrechnen:

$$\det(A) = A_{31} \cdot C_{31} + A_{32} C_{32} + A_{33} C_{33} + A_{34} C_{34}$$

$$= 2 \cdot C_{33}$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = (-1)^{1+1} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = -8$$

Also $\det(A) = 2 \cdot (-8) = -16$

1. Computing determinants (in-class) (★☆☆)

a) For what values of $a, b, c \in \mathbb{R}$ is the determinant of the following matrix zero? (You should justify your answer.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & c \\ a & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & b & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hint: Use Proposition 7.3.2.

b) It turns out that the determinant of a triangular matrix is easy to calculate (Proposition 7.2.4). Moreover, the determinant does not change when a multiple of a row is added to another row (and row swaps only change the sign). This allows us to efficiently determine the determinant of any matrix using Gauss elimination. Determine the determinant of

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

by performing the Gauss elimination manually.

Proposition 7.3.2. *Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, for any $1 \le i \le n$,*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} C_{ij}.$$

Wir fixieren eine Reihe und entwickeln entlang dieser.

Das ist meistens nützlich, wenn eine Reihe viele Nullen hat.

Theorem 7.2.5. *Given a matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, then*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Falls wir eine Spalte mit vielen Nullen haben, dann nehmen wir die Transposition und wenden 7.3.2 an.

Für Aufgabe a) folgt also:

Sei C_{ij} der Kofaktor von A mit $i, j \in \{1, \dots, 5\}$. Also ist C_{ij} die Determinante von der Matrix, wenn man von A^T die i-te Reihe und j-te Spalte entfernt.

$\det(A) = \det(A^T)$ (7.2.5)

$$= \sum_{j=1}^{5} (A^T)_{3,j} \quad C_{3,j}$$

$$= 0 \cdot C_{3,1} + 0 \cdot C_{3,2} + b \cdot C_{3,3} + 0 \cdot C_{3,4} + 0 \cdot C_{3,5}$$

$$= b \cdot (-1)^{3+3} \det\left(\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ c & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= b \cdot a \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$ 7.3.2 für erste Reihe

$$= -b \cdot a \cdot (1 - 6c + 0 - (-4c + 0 - 8))$$ Regel von Sarrus

$$= -ba(9 - 2c)$$

$$= ab(2c - 9)$$

Also gilt $\det(A) = 0$ wenn mindestens eins von

$a = 0$, $b = 0$, $c = \frac{9}{2}$ gilt.

b) Wir machen Gauss-Elimination mit B:

$$\det(B) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

Da wir nur Zeilen addieren, müssen wir nicht skalieren!

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -2$$

2. Beispiel   Gauss - Elimination:

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-1) \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-1) \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-1) \cdot (-8) = 8$$

Musterbeispiel 3.4 (LGS mit Cramer'schen Regel lösen)

Als Beispiel lösen wir das folgende LGS mit der Cramer'schen Regel:

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Die Matrixdarstellung des LGS ist $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wegen $\det(\boldsymbol{A}) = \det \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2\cdot(-1) - 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \neq 0$ hat das LGS genau eine Lösung. Mit der Cramer'schen Regel finden wir

$$x_1 = \frac{\det(\boldsymbol{A_1})}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix}}{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{\det(\boldsymbol{A_2})}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5}.$$

Die Lösung lautet somit $\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \right\}$.

Übung 9.2

∘ ∘ ∘ Man zeige, dass $\boldsymbol{v_1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{v_2} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ Eigenvektoren von $\boldsymbol{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ sind. Man berechne $\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{A}^6 \boldsymbol{v}_2$.

Lösung

a) Es gilt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = (-3)\,\boldsymbol{v}_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_1 \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert -3,}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\,\boldsymbol{v}_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_2 \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert 3.}$$

HS 19

[k] [f] Gegeben sei die untere Dreiecksmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{N}^{3\times 3}$, deren Einträge natürliche Zahlen sind und für die gilt, dass alle Einträge entweder nur einmal vorkommen oder Null sind. Markieren Sie für jede der folgenden Zahlen, ob sie der Wert der Determinante $\det(\mathbf{A})$ sein kann [k] oder nicht [f].

( ) (x) 5

(x) ( ) 6

( ) (x) -2

(x) ( ) 35

Bei einer Dreiecksmatrix ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge. Es gilt:

$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $35 = 7 \cdot 5 \cdot 1$

also sind 6 und 35 mögliche Determinanten.

5 und -2 kann man nicht als Produkt sich nicht wiederholender natürlichen Zahlen schreiben.

HS 20

[k] [f] Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Markieren Sie für jede folgende Aussage, ob sie korrekt [k] oder falsch [f] ist.

☒ ○ Es gilt $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB})$.

○ ☒ Es gilt $\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}+\mathbf{B})$.

☒ ○ Es gilt $\det(\mathbf{A})^{-1} = \det(\mathbf{A}^{-1})$ falls $\mathbf{A}$ invertierbar ist.

○ ☒ Es gilt $|\det(\mathbf{A})| = 1$ genau dann wenn $\mathbf{A}$ orthogonal ist.

i) Theorem 7.2.6

ii) Falsch: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A) + \det(B) = 2$

$\det(A+B) = 4$

iii) ✓ Theorem 7.2.6

iv) orthogonal $\Rightarrow$ $|\det(A)| = 1$, aber

$|\det(A)| = 1$ $\not\Rightarrow$ orthogonal:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, nicht orthogonal aber $\det(A) = 1$

HS 20

Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für $z \in \mathbb{C}$ und $\theta \in \mathbb{R}$?

○ $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) \geq 0$. $\theta = \pi$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(e^{i\pi}) = \cos(\pi) = -1$

○ $\mathrm{Re}(z) = z + \bar{z}$. $z = 1+i$: $z + \bar{z} = 2 \neq 1$

☒ $|z^2 e^{i\theta}| = |\bar{z}|^2$.

○ $|z + e^{i\theta}| \geq |z|$. $z = 1+i$, $\theta = \pi$ $\Rightarrow$

$|z^2 e^{i\theta}| = |z^2|\ |e^{i\theta}|$

$\Leftrightarrow |z|^2\ |\cos(\theta) + i\sin(\theta)|$

$= |z|^2 \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}$

$= |z|$

$= |\bar{z}|$

3

Welche der folgenden Aussagen über komplexe Matrizen ist richtig?

○ Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. $\det(A) = 1 - 1 = 0$

○ Der Rang der Matrix $\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ i & 1+i \\ 1-i & -2i \end{pmatrix} \end{array}$ ist 2. $C_1 = \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right) C_2$

$C_2 = (1-i) C_1$

☒ Ist $\mathbf{A} = i\,\mathbf{I}$, so ist $\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}$. $R_2 = \frac{1}{2}(R_1 - R_3)$

○ Es gibt genau zwei 2×2 Matrizen $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$. $R_3 = -i R_1$

3. $iI \cdot (-iI)$

$= i \cdot (-i)\; I \cdot I$

$= I$

4. F: $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$

Prüfungstraining:

Übung 3.16

• • ○ Sei $\boldsymbol{A}$ eine schiefsymmetrische $(n \times n)$-Matrix. Man zeige, dass für ungerades n

$$\det(\boldsymbol{A}) = 0$$

ist. Ist diese Aussage auch richtig für n gerade?

Lösung

Da $\boldsymbol{A}$ schiefsymmetrisch ist, gilt $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$. Aus den Rechenregeln für Determinanten (Regel D2) folgt unmittelbar:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det\left(\boldsymbol{A}^T\right) = \det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^n \det(\boldsymbol{A}).$$

Ist n ungerade, so gilt $(-1)^n = -1$, d. h.

$$\det(\boldsymbol{A}) = -\det(\boldsymbol{A}) \quad \Rightarrow \quad \det(\boldsymbol{A}) = 0.$$

Für gerades n ist $(-1)^n = 1$. Wir erhalten also die triviale Aussage $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})$. In der Tat muss für gerades n nicht $\det(\boldsymbol{A}) = 0$ gelten. Zum Beispiel, die (2×2)-Matrix $\boldsymbol{A} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ ist schiefsymmetrisch, trotzdem $\det(\boldsymbol{A}) = 2$. ■

$E = I$ (Identitätsmatrix)

Übung 3.14

• • ○ Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ invertierbare $(n \times n)$-Matrizen. Man berechne

a) $\det\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{B}^{-1}\right) \det\left(\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\right) \det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$

b) $\det\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T\right)$

Lösung

a) Zuerst vereinfachen wir den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) &= \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^2 \\ &= \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^2. \end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Determinanten finden wir:

$$\begin{aligned} &\det\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{B}^{-1}\right) \det\left(\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\right) \det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) \\ &\qquad = \det(\boldsymbol{B}) \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \frac{1}{\det(\boldsymbol{B})} \det\left(\boldsymbol{A}^2\right) \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \\ &\qquad = \cancel{\det(\boldsymbol{B})} \frac{1}{\cancel{\det(\boldsymbol{A})}} \frac{1}{\cancel{\det(\boldsymbol{B})}} \cancel{\det(\boldsymbol{A})}\cancel{\det(\boldsymbol{A})} \frac{1}{\cancel{\det(\boldsymbol{A})}} = 1. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} &\det\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T\right) = \det\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^T)^T\boldsymbol{A}^T\right) \\ &= \det\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\right) = \det\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^T\right) \\ &= \det\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{A}^T\right) = \det(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}) = \det(2\boldsymbol{E}) = 2^n \underbrace{\det(\boldsymbol{E})}_{=1} = 2^n. \end{aligned}$$

■