

Korrektur letzte Woche

1. Properties of pseudoinverses (in-class) (★★☆)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ be arbitrary matrices.

- Prove that if $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$, we have $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.
- Prove that $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$.
- Prove that $(A^T)^\dagger = (A^\dagger)^T$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

a) Wir zeigen $\text{rank}(AB) = n$:

$$\text{rank}(AB) = \dim(\mathcal{L}(AB))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(AB) &= \{ ABx \mid x \in \mathbb{R}^p \} \\ &= \{ A(Bx) \mid x \in \mathbb{R}^p \} \\ &= \{ Ay \mid y \in \mathcal{L}(B) \} \\ &= \{ Ay \mid y \in \mathbb{R}^n \} \\ &= \mathcal{L}(A) \end{aligned}$$

Beweis $\mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^n$:

Für $x \in \mathbb{R}^p$ ist $Bx \in \mathbb{R}^n$, also ist $\mathcal{L}(B) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Da $\text{Rank}(B) = n$ ist, gilt $\dim(\mathcal{L}(B)) = n$.

Da $\mathcal{L}(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt, muss also $\mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^n$ gelten.

Korrektur letzte Woche:

$$\text{Es gilt: } AB = [A b_1 \dots A b_p], \quad B = [b_1 \dots b_p]$$

Proposition 6.4.9. For $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, with $\text{rank}(A) = r$, let $S \in \mathbb{R}^{m \times r}$ and $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$ such that $A = ST$.

$$A^\dagger = T^\dagger S^\dagger.$$
$$(AB)^\dagger = M^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Also können wir Proposition 6.4.9 mit $M = AB$ anwenden

und erhalten, dass $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

1. Gram-Schmidt (in-class) (☆☆☆)

Consider the invertible matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

- Apply the Gram-Schmidt process to the columns of A .
- Write down a QR -decomposition of A .
- Apply the Gram-Schmidt process to the columns of B .
- Is it always true that the Gram-Schmidt process on the columns of an upper triangular $n \times n$ matrix with non-zero diagonal entries yields the canonical basis e_1, \dots, e_n ? Provide a proof or counterexample.

a) Sei $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$

Wir beginnen mit Gram-Schmidt:

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$q_2' = a_2 - (a_2^\top q_1) q_1 = a_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} q_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{q_2'}{\|q_2'\|} = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$q_3' = a_3 - (a_3^\top q_1) q_1 - (a_3^\top q_2) q_2$$

$$= a_3 - \sqrt{2} q_1 - 0 q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \frac{q_3'}{\|q_3'\|} = \frac{1}{1} q_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\{q_1, q_2, q_3\}$ die gesuchte Menge orthonormaler Vektoren.

In-Class

b) Wir haben

$$Q = \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Wir berechnen R :

$$\begin{aligned} R &= Q^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Seien b_1, b_2, b_3, b_4 die Spalten von B . Wir wenden den Gram-Schmidt Algorithmus an:

$$q_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$q_2' = b_2 - (b_2^T q_1) q_1 = b_2 - 2q_1 = (0 \ 4 \ 0 \ 0)^T$$

$$q_2 = \frac{q_2'}{\|q_2'\|} = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$$

$$\begin{aligned} q_3' &= b_3 - (b_3^T q_1) q_1 - (b_3^T q_2) q_2 = b_3 - 3q_1 - 5q_2 \\ &= (0 \ 0 \ 7 \ 0)^T \end{aligned}$$

$$q_3 = \frac{q_3'}{\|q_3'\|} = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$$

$$\begin{aligned} q_4' &= b_4 - (b_4^T q_1) q_1 - (b_4^T q_2) q_2 - (b_4^T q_3) q_3 \\ &= b_4 - 0q_1 - 6q_2 - 8q_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 9)^T \end{aligned}$$

$$q_4 = \frac{q_4'}{\|q_4'\|} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

d) Nein, Gegenbeispiel: $A = -I$ für jedes $n \in \mathbb{N}^+$

Die Spalten von A sind bereits orthonormal, also verändert Gram-Schmidt die Matrix nicht.

↑ Das reicht als Antwort auf diese Aufgabe!

Aber weil beweisen so viel Spass macht, ^j beweisen wir zusätzlich:

Sei A eine obere Dreiecksmatrix mit strikt positiven Diagonaleinträgen.

Wir zeigen, dass Gram-Schmidt immer die Einheitsbasis produziert.

Seien a_1, \dots, a_n die Spalten von A und q_1, \dots, q_n die orthonormalen Vektoren, die wir durch Gram-Schmidt auf a_1, \dots, a_n erhalten. Wir behaupten

$q_i = e_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir verwenden einen Widerspruchsbeweis:

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ der kleinste Index so dass $q_i \neq e_i$.

Da $a_1 = c e_1$, $c \in \mathbb{R}$ gilt, muss $i > 1$ sein.

Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, müssen die letzten $n-i$ Einträge von a_i 0 sein.

Falls eines der ersten $i-1$ Einträge nicht null ist, also $j < i$

und $(a_i)_j \neq 0$, dann ist $q_j^T q_i = e_j^T q_i \neq 0$, was der

Orthogonalität von q_j und q_i widerspricht.

Also ist der einzige nicht-null Eintrag von a_i der i -te Eintrag.

Da der i -te Eintrag positiv ist und nicht durch den

Gram-Schmidt Algorithmus verändert wird (da A obere Dreiecksmatrix),

Also muss $q_i = e_i$, was unserer Annahme widerspricht.

Daraus folgt, dass $q_i = e_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.

Theorem 6.2.4.

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \emptyset \iff \{z \in \mathbb{R}^m \mid A^T z = 0, b^T z = 1\} \neq \emptyset.$$

2. Characterizing solvability via nullspaces (bonus, hand-in) (★★☆)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ and $B \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$. Consider the system of linear equations

$$(EQ) \quad Ax + By = c, \quad c \in \mathbb{R}^m$$

where $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ and $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ are the unknown vectors. Show that the system has a solution (x, y) for every right-hand side $c \in \mathbb{R}^m$ if and only if the null spaces of A^T and B^T satisfy

$$\mathbf{N}(A^T) \cap \mathbf{N}(B^T) = \{0\}$$

Hint: Use Theorem 6.2.4. from the lecture notes.

Wir schreiben das Gleichungssystem als Matrix:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

Wir verwenden Kontraposition:

Das System hat keine Lösung für ein $c \iff \mathbf{N}(A^T) \cap \mathbf{N}(B^T) \neq \{0\}$

\Rightarrow Es gilt $\{x \in \mathbb{R}^{n_1}, y \in \mathbb{R}^{n_2} \mid \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\} = \emptyset$

Aus Theorem 6.2.4 folgt dann, dass

$$\{z \in \mathbb{R}^m \mid \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} z = 0, c^T z = 1\} \neq \emptyset$$

beide Seiten transponieren

↓

Also existiert ein $z \in \mathbb{R}^m$ mit $A^T z = 0 \iff z^T A = 0,$

$B^T z = 0 \iff z^T B = 0,$ also $z \in \mathbf{N}(A^T), z \in \mathbf{N}(B^T)$. Wegen

$c^T z = 1$ folgt, dass $z \neq 0$. Also gilt $z \neq 0,$

$z \in \mathbf{N}(A^T) \cap \mathbf{N}(B^T),$ und somit ist $\mathbf{N}(A^T) \cap \mathbf{N}(B^T) \neq \{0\}.$

⇐ Es gilt $z \in N(A^T) \cap N(B^T)$, $z \neq 0$ (Da 0 immer im Nullraum ist, kann $N(A^T) \cap N(B^T) = \emptyset$ nicht stimmen).

Es gilt also: $A^T z = 0$, $B^T z = 0$, $z \neq 0$.

Vir wollen Theorem 6.2.4. anwenden. Es gilt $\begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} z = 0$, also

suchen wir ein c , so dass $c^T z = 1$. Vir wählen

$c = \frac{1}{\|z\|^2} z$. Dann gilt $c^T z = \frac{1}{\|z\|^2} z^T z = 1$.

Also wenden wir Theorem 6.2.4 an und erhalten

dass $\{x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^{n_2} \mid \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\} = \emptyset$

HS 19

[k] [f] Gegeben sind die orthogonalen Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Markieren Sie für jede folgende Aussage, ob sie korrekt [k] oder falsch [f] ist.

- ~~⊗~~ Die Matrix \mathbf{AB} ist orthogonal, aber \mathbf{BA} ist im Allgemeinen nicht orthogonal.
- ~~⊗~~ Die Matrix \mathbf{BA} ist orthogonal, aber \mathbf{AB} ist im Allgemeinen nicht orthogonal.
- ~~⊗~~ Die Matrix \mathbf{AB} und die Matrix \mathbf{BA} sind im Allgemeinen orthogonal.
- ~~⊗~~ Die Matrix \mathbf{AB} und die Matrix \mathbf{BA} sind im Allgemeinen nicht orthogonal.

$$M \text{ orthogonal} \Leftrightarrow M^T M = I$$

Wir überprüfen also $M = AB$ und $M = BA$:

$$\begin{aligned} (AB)^T (AB) &= B^T A^T A B \\ &= B^T I B \\ &= I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (BA)^T (BA) &= A^T B^T B A \\ &= A^T A \\ &= I \end{aligned}$$

Also sind sowohl AB als auch BA orthogonal.

[k] [f] Gegeben sei die untere Dreiecksmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{N}^{3 \times 3}$, deren Einträge natürliche Zahlen sind und für die gilt, dass alle Einträge entweder nur einmal vorkommen oder Null sind. Markieren Sie für jede der folgenden Zahlen, ob sie der Wert der Determinante $\det(\mathbf{A})$ sein kann [k] oder nicht [f].

~~5~~

~~6~~

~~-2~~

~~35~~

Bei einer Dreiecksmatrix ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge. Es gilt:

$$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 35 = 7 \cdot 5 \cdot 1$$

also sind 6 und 35 mögliche Determinanten.

5 und -2 kann man nicht als Produkt sich nicht wiederholender natürlicher Zahlen schreiben.

[k] [f] Markieren Sie für jede folgende Aussage, ob sie korrekt [k] oder falsch [f] ist.

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.
- Wir betrachten den Vektorraum \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt. Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren kann beliebig gross sein.
- Wir betrachten wieder \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt. Wir können eine beliebig grosse Menge von Vektoren in diesem Vektorraum finden, die paarweise orthogonal sind.

i) Die erste Richtung folgt direkt aus der Definition:

Definition 6.3.3 (Orthogonal Matrix). A square matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is an orthogonal matrix when $Q^T Q = I$. In this case, $Q Q^T = I$, $Q^{-1} = Q^T$, and the columns of Q form an orthonormal basis for \mathbb{R}^n .

Die zweite Richtung folgt aus der Definition von orthonormalen Vektoren

Definition 6.3.1 (Orthonormal vectors). Vectors $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^m$ are orthonormal if they are orthogonal and have norm 1. In other words, for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$q_i^T q_j = \delta_{ij},$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta

$$(8) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j. \end{cases}$$

$$\text{Da } Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T q_1 & \dots & q_1^T q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T q_1 & \dots & q_n^T q_n \end{bmatrix} = I$$

ii) Erinnere die Definition

von Winkel:

Definition 1.14 (Angle). Let $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ be two nonzero vectors. The angle between them is the unique α between 0 and π (180 degrees) such that

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \in [-1, 1].$$

(Here, the interval $[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ comes from the Cauchy Schwarz inequality, Lemma 1.12). In other words,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}\right).$$

$$\text{Es gilt: } \cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos(\alpha) \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$$

Falls \mathbf{v}, \mathbf{w} Einheitsvektoren sind, so gilt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos(\alpha), \quad \text{also } |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq 1.$$

iii) Falsch, da es in \mathbb{R}^n höchstens n linear unabhängige Vektoren gibt.

FS 20

Definition 6.3.3 (Orthogonal Matrix). A square matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is an orthogonal matrix when $Q^T Q = I$. In this case, $Q Q^T = I$, $Q^{-1} = Q^T$, and the columns of Q form an orthonormal basis for \mathbb{R}^n .

[k] [f] Gegeben sind die orthogonalen Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Markieren Sie für jede folgende Aussage, ob sie korrekt [k] oder falsch [f] ist.

Die Matrix \mathbf{A}^T ist orthogonal

Wir wollen zeigen, dass $(\mathbf{A}^T)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$. (Def. 6.3.3).

Es gilt $(\mathbf{A}^T)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ wegen 6.3.3.

Die Matrix $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ist orthogonal

Gegenbeispiel: $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{I}$ sind beide orthogonal,
aber $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ist nicht orthogonal.

Die Matrix $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ ist orthogonal

Gegenbeispiel: $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = 2\mathbf{I}$, was nicht
orthogonal ist ($2\mathbf{I} \cdot (2\mathbf{I})^T = 4\mathbf{I} \neq \mathbf{I}$).

Die Matrix $\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$ ist orthogonal

Bemerkung, dass $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T$ da \mathbf{B} orthogonal.

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1})^T (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}) &= (\mathbf{A} \mathbf{B}^T)^T (\mathbf{A} \mathbf{B}^T) & \mathbf{B}^{-1} &= \mathbf{B}^T \\ &= \mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \mathbf{I} \\ &= \mathbf{B} \mathbf{I} \mathbf{B}^T & \mathbf{B} \mathbf{B}^T &= \mathbf{I} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

Probepfprüfung HS 24

5. Let $A \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$ be arbitrary. Let A^\dagger be the pseudoinverse of A . Which of the following statements must be true? Note: only one answer is correct.

- ✓ (a) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\dagger)$.
- (b) $AA^\dagger = I$.
- (c) $\text{rank}(A^\dagger) = 5$.
- (d) $A^\dagger A = I$.

Probepfprüfung HS 24

a) Beweis, dass $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\dagger)$

$$\text{rank}(A^\dagger) \leq \text{rank}(A)$$

Sei $y \in \mathcal{L}(A^\dagger)$. Es existiert also $y = A^\dagger x$ für ein x .

Es gilt:

$$A^\dagger A y = A^\dagger A A^\dagger x \stackrel{\text{Theorem 6.4.10}}{=} A^\dagger x = y$$

Es gilt also:

$$y = A^\dagger A y \stackrel{\text{Theorem 6.4.10}}{=} (A^\dagger A)^\top y = A^\dagger \overbrace{(A^\dagger)^\top}^{\text{Vektor}} y$$

Also ist y eine Linearkombination der Spalten von A^\top , also

$y \in \mathcal{L}(A^\top)$. Daraus folgt:

$$\mathcal{L}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{L}(A^\top) \Rightarrow \dim(\mathcal{L}(A^\dagger)) \leq \dim(\mathcal{L}(A^\top)) \Rightarrow \text{rank}(A^\dagger) \leq \text{rank}(A^\top).$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A^\dagger) \leq \text{rank}(A)$$

↪ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\dagger)$, Theorem 4.33

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A^+)$$

Sei $y \in \mathcal{L}(A)$. Es existiert also $y = Ax$ für ein x .

Es gilt:

$$AA^+y = \overset{\text{Theorem 6.4.10}}{AA^+Ax} = Ax = y$$

(AA^+ ist Projektionsmatrix auf $\mathcal{L}(A)$)

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (AA^+y)^T &= y^T && \text{Auf beiden Seiten transponieren} \\ \Rightarrow y^T(AA^+)^T &= y^T && (Cx)^T = x^T C^T, \\ \Rightarrow y^T AA^+ &= y^T && (AA^+)^T = AA^+ \quad (\text{Theorem 6.4.10}) \\ \Rightarrow (y^T AA^+)^T &= (y^T)^T && \text{beide Seiten transponieren} \\ \Rightarrow (AA^+)^T y &= y && (Cx)^T = x^T C^T \\ \Rightarrow (A^+)^T \overset{\text{Vektor}}{Ay} &= y && (CB)^T = B^T C^T \\ \Rightarrow y \in \mathcal{L}((A^+)^T) &\Rightarrow y \in R(A^+) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{L}(A) \subseteq R(A^+) \Rightarrow \dim(\mathcal{L}(A)) \leq \dim(R(A^+))$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) \leq \text{rank}(A^+)$$

\uparrow
 $\dim(\mathcal{L}(A)) = \text{rank}(A)$ laut Theorem 4.31

$\dim(R(A^+)) = \text{rank}(A)$ wegen Theorem 4.32

5. Let $A \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$ be arbitrary. Let A^\dagger be the pseudoinverse of A . Which of the following statements must be true? Note: only one answer is correct.

- ✓ (a) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\dagger)$.
- (b) $AA^\dagger = I$.
- (c) $\text{rank}(A^\dagger) = 5$.
- (d) $A^\dagger A = I$.

b) Sei $A = 0$

Egal was A^\dagger ist, $AA^\dagger \neq I$, da $0A^\dagger = 0$

c) Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $R = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

$$A^\dagger = R^T (C^T A R^T)^{-1} C^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ([1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})^{-1} [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1]^{-1} [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}$$

A^\dagger hat Rang 1, also $\text{rank}(A^\dagger) = 5$ gilt nicht immer.

d) Wenn $A=0$, ist $A^\dagger A = 0 \neq I$.