Theorem 4.38 (Solution space from shifting the nullspace). *Let A be an $m \times n$ matrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Let $\mathbf{s}$ be some solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Then*

$$\mathbf{Sol}(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{s} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{N}(A)\}.$$

Hence, we can also compute $\mathbf{Sol}(A, b)$, despite the fact that it is not a subspace. To describe all solutions, we just need *some* solution $\mathbf{s}$ (for example the canonical one from Section 3.3.2) and a basis $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-r}\}$ of $\mathbf{N}(A)$ (see Theorem 4.36). Then

$$\mathbf{Sol}(A, \mathbf{b}) = \left\{\mathbf{s} + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \mathbf{v}_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ for } i \in [n-r]\right\}.$$

1. **Solving linear systems (in-class)** (★☆☆)

   Consider the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ with

   $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 12 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & -6 \end{bmatrix}, \text{ and } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

   a) Determine the set of solutions $\mathbf{Sol}(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, i.e., write down an *explicit* characterization of this set of solutions in the form presented after Theorem 4.38 on page 155 in the lecture notes.

   b) Write down a basis for $\mathbf{N}(A)$ (you might have already found it in the previous subtask), and also find a basis for $\mathbf{C}(A)$.

   c) What are the dimensions of $\mathbf{N}(A)$, $\mathbf{C}(A)$, $\mathbf{N}(A^\top)$, and $\mathbf{R}(A)$?

   d) Determine a basis of $\mathbf{R}(A)$.

a) Vir wissen von Theorem 4.38, dass

$Sol(A, b) = \{ s + x : x \in N(A) \}$ wobei s eine Lösung für $Ax = b$ ist.

Also müssen wir $N(A)$ und eine Lösung für $Ax = b$ finden.

Dazu machen wir Gauss-Jordan Elimination:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & -6 \\ -3 & 3 & 12 & -3 & -15 \\ 1 & -14 & -7 & -6 & 8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -8 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -10 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} j_1 & j_2 & j_3 & r_1 \end{array} \end{array}$$

Daraus können wir eine Lösung ablesen: $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebenfalls können wir aus $RREF(A)$ eine Basis für den Nullraum ablesen:

$$Q = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Negation der nicht-null Einträge vom ersten Basisvektor

1 bei Index vom 1. nicht-Basisvektor

Daraus folgt, dass

$$Sol(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Eine Basis für den Nullraum haben wir aus a):

$$B_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eine Basis vom Spaltenraum ist gegeben durch die Spalten von A bei den Indizes j_1, j_2, j_3:

$$B_{C(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$

c) $\mathrm{Dim}(N(A)) = |N(A)| = 1$

$\mathrm{Dim}(C(A)) = |C(A)| = 3$

Theorem 4.36

$\mathrm{Dim}(N(A^T)) = \#\text{Spalten} - \mathrm{Dim}(C(A)) = 3 - 3 = 0$

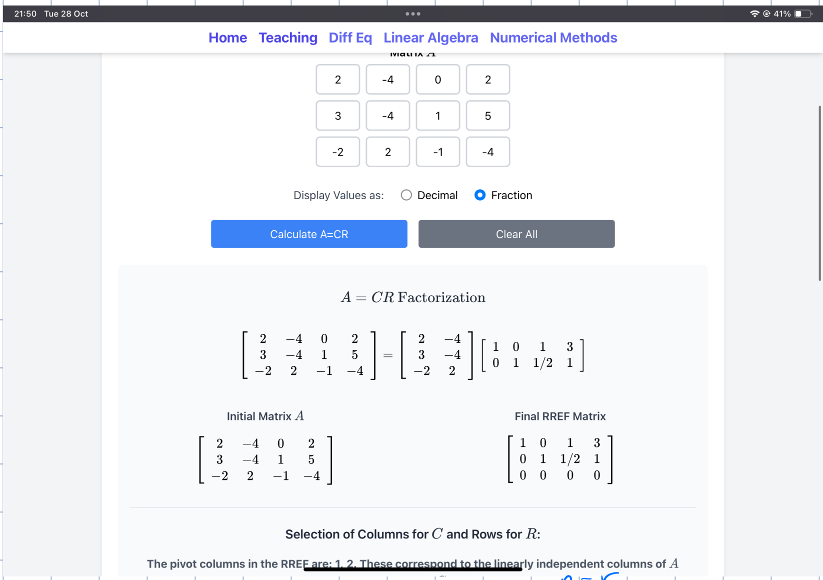
$\mathrm{Dim}(R(A)) = \mathrm{Dim}(C(A)) = 3$

d) Von Theorem 4.32 wissen wir, dass die nicht-null Spalten in der reduzierten Zeilenstufenform eine Basis für $R(A)$ bilden. Also ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für $R(A)$.

Beispiel Basis vom Nullraum



21:50 Tue 28 Oct — 41%

Home Teaching Diff Eq Linear Algebra Numerical Methods

Matrix A

2	-4	0	2
3	-4	1	5
-2	2	-1	-4

Display Values as: Decimal Fraction

Calculate A=CR Clear All

$A = CR$ Factorization

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Initial Matrix A

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Final RREF Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selection of Columns for C and Rows for R:

The pivot columns in the RREF are: 1, 2. These correspond to the linearly independent columns of A

RREF:

$$\begin{array}{cccc} & & \overbrace{\qquad\qquad}^{n-r} & \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] & & & \\ j_1 & j_2 & k_1 & k_2 \end{array} \quad \left.\right\} r$$

$\Rightarrow \quad j_1 = 1, \quad j_2 = 2$

$\qquad k_1 = 3 \quad k_2 = 4$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad -Qe_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \qquad -Qe_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

v_1:
$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -Qe_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{k_1} \\ x_{k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_2:
$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -Qe_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{k_1} \\ x_{k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$