2. Nullspace and column space (hand-in) (★★☆)

Let $\mathbf{v}$ be a *unit vector* (i.e. $\| \mathbf{v} \| = 1$) in $\mathbb{R}^3$. Consider the 3×3 matrices A and P defined by

$$A := \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad P := I_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^\top = I_3 - A$$

where I_3 is the 3×3 identity matrix.

a) Show that $A^2 = A$ and $P^2 = P$.

b) Let $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ be orthogonal to $\mathbf{v}$. Prove $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

c) Now let $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ be a vector satisfying $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Prove $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.

d) Based on b) and c), describe the nullspace $\mathbf{N}(A)$.

e) Determine the rank of A. Is A invertible?

f) Prove that $\mathbf{C}(A) = \{\alpha\mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathsf{Span}(\mathbf{v})$.

g) Also prove that $\mathbf{C}(A) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{w} = \mathbf{w}\}$.

h) Use g) to prove $\mathbf{N}(P) = \mathbf{C}(A)$.

i) Finally, prove $\mathbf{C}(P) = \mathbf{N}(A)$.

***Hint**: In every subtask you may of course use statements that you have already proven in previous subtasks. For some of the subtasks we specifically tell you which previous subtasks might be helpful.*

a) Betrachte: $v^\top v = v \cdot v = \|v\|^{2} = 1$ ← nicht vergessen! (1)

Also gilt:

$$A^2 \overset{\text{Def}}{=} (vv^\top)(vv^\top) \overset{\text{Assoziativität}}{=} v(v^\top v)v^\top \overset{(1)}{=} v\,1\,v^\top = vv^\top \overset{\text{Def}}{=} A \quad (2)$$

$$P^2 = (I - A)^2 = I^2 - 2A + A^2 \overset{(2)}{=} I - 2A + A = I - A = P$$

b) Wenn w orthogonal zu v ist, dann gilt $w^\top v = 0$ (Def.)

Also gilt: $Aw = (vv^\top)w = v(v^\top w) = v \cdot 0 = 0$

c) Es gilt:

$0 = Aw = (vv^\top)w = v(v^\top w)$

$v^\top w$ ist ein Skalar und $v \neq 0$, da $\|v\| = 1$.

$v \cdot (v^\top w) = 0$ kann also nur erfüllt werden, wenn $v^\top w = 0$.

d) Aus b) und c) erhalten wir, dass $Aw = 0$ genau dann gilt, wenn $v^\top w = 0$. Also ist der Nullraum gegeben durch:

$N(A) = \{ w \in \mathbb{R}^3 : w \cdot v = 0 \}$.

In Worten ist das die Menge aller Vektoren, die orthogonal zu v sind, also eine Hyperebene.

e) Es gilt:

$$A = vv^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 v_1 & v_2 v_1 & v_3 v_1 \\ v_1 v_2 & v_2 v_2 & v_3 v_2 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & v_3 v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 v & v_2 v & v_3 v \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Da $v \neq 0$, ist mindestens eine der Spalten nicht 0. $(\text{Rank}(A) \geq 1)$

Alle anderen Spalten sind dann eine Linearkombination dieser Spalte. $(\text{Rank}(A) \leq 1)$

Also ist $\text{Rank}(A) = 1$, und A ist nicht invertierbar.

(Oder verwende Assignment 2 Aufgabe 2)

f) $\{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(v)$ ist die Definition vom Span, also müssen wir nur die erste Gleichheit beweisen.

- $C(A) \subseteq \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$

  Sei $w \in C(A)$. Per Definition von $C(A)$ existiert ein x mit $Ax = w$. Es folgt:

  $$w = Ax = (vv^T)x = v \cdot \underbrace{(v^T x)}_{\text{Skalar}} = v \cdot \alpha = \alpha v \quad \text{mit } \alpha = v^T x.$$

  Also ist $w \in \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$

- $\{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq C(A)$

  Sei $w \in \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ beliebig, also $w = \alpha v$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Es gilt

  $$Aw = vv^T w = vv^T(\alpha v) = \alpha\, v(v^T v) \overset{1}{=} \alpha v = w$$

  Also ist $w \in C(A)$.

g) Wegen f) reicht es, zu zeigen:

$$\{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{w \in \mathbb{R}^3 : Aw = w\}$$

$\{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \{w \in \mathbb{R}^3 : Aw = w\}$

Sei $\alpha v \in \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Es gilt

$$A\alpha v = vv^T \alpha v = \alpha v(v^T v) = \alpha v.$$

Also ist $\alpha v \in \{w \in \mathbb{R}^3 : Aw = w\}$

$\{w \in \mathbb{R}^3 : Aw = w\} \subseteq \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$

Sei $w \in \{w \in \mathbb{R}^3 : Aw = w\}$.

w ist in $C(A)$, da $w = w_1 \cdot v_1 v + w_2 v_2 v + w_3 v_3 v$

Auf f) folgt, dass w dann auch in $\{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ ist.

h) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Es gilt:

$$Pw = 0 \iff (I - A)w = 0 \iff w - Aw = 0 \iff Aw = w$$

Daraus folgt, dass $N(A) = \{w \in \mathbb{R}^3 : Aw = w\} \overset{g)}{=} C(A)$

i) $C(P) \subseteq N(A)$:

Sei $w \in C(P)$ beliebig. Per Definition existiert $x \in \mathbb{R}^3$ mit

Wir wollen zeigen, dass $A(w) = 0$

$Px = w$. Daraus folgt:

$$Aw = A(P(x)) = A(I - A)x = (A - A^2)x \overset{a)}{=} (A - A)x = 0$$

Also ist $C(P) \subseteq N(A)$.

$N(A) \subseteq C(P)$:

Sei $w \in N(A)$ beliebig. Es gilt also $Aw = 0$.

Es gilt auch: $Pw = (I - A)w = w - Aw = w$

Also ist $N(A) \subseteq C(P)$.

5. Orthogonal subspaces in $\mathbb{R}^4$ (★★★)

Let $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ and $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$ be subspaces of $\mathbb{R}^4$.

a) Determine a basis of $V^\perp$.

b) Does there exist a basis of W such that no basis element is in $V^\perp$?

c) Does there exist a basis of W such that exactly one basis element is in $V^\perp$?

d) Does there exist a basis of W such that exactly two basis elements are in $V^\perp$?

e) Does there exist a basis of W such that exactly three basis elements are in $V^\perp$?

Justify your answers.

a) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind eine Basis für V. ↗ Überprüfe lineare Unabhängigkeit & Span.

(Theorem 5.1.7)

Da $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ und $\dim(V) = 2$, $\dim(V^\perp) = 4 - 2 = 2$.

Also hat eine Basis von $V^\perp$ 2 Elemente, die jeweils orthogonal zu e_1 und e_2 sind. (Lemma 5.1.2)

Wir suchen also v_1 und v_2, so dass $e_i^T v_j = 0$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$. Das heisst, dass die ersten beiden Koordinaten von v_1, v_2 0 sind und die anderen beliebig. Wir haben also:

$$V^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Also bilden $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $V^\perp$.

Was ist $\dim(W)$?

Intuitive Überlegung: $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ und wir haben eine zusätzliche Bedingung, also hat W 3 Freiheitsgrade, und $\dim(W) = 3$.

Genauere Argumentation: W ist eine Hyperebene, da

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \iff x^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Also ist $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

Laut Assignment 6 Aufgabe 5 ist dann $\dim(V^\perp) = 3$.

b) Ja: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v \notin V^\perp$ genau dann, wenn $v_1 \neq 0$ oder $v_2 \neq 0$.

Wir suchen also 3 linear unabhängige Vektoren $b_1, b_2, b_3 \in W$,

$b_1, b_2, b_3 \notin V^\perp$. Da $\dim(W) = 3$, bilden diese eine Basis von W.

wieso ?

Wir wählen $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, da sie alle einen nicht-null Eintrag haben, wo die anderen Vektoren einen 0-Eintrag haben.

Durch Konstruktion sind $b_1, b_2, b_3 \notin V^\perp$ und $b_1, b_2, b_3 \in W$.

Also bilden b_1, b_2, b_3 eine Basis ohne Element in $V^\perp$.

c) Ja: Wir gehen analog vor zu b), jedoch wählen wir

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese sind linear unabhängig, $b_1, b_2 \notin V^\perp$, $b_3 \in V^\perp$, $b_1, b_2, b_3 \in W$,

also bilden sie eine Basis mit einem Element in $V^\perp$.

d) Nein: Seien $b_1, b_2, b_3 \in W$, $b_1 \notin V^\perp$, $b_2 b_3 \in V^\perp$.

Das heisst insbesondere, dass die ersten beiden Elemente von b_2, b_3 0 sind. Betrachte nun

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad w_1, w_2 \in W.$$

Da die ersten beiden Koordinaten von w_1 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind, müssen die ersten beiden Koordinaten von $b_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sein.

Analog gilt, da die ersten beiden Koordinaten von w_2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind, dass die ersten beiden Koordinaten von $b_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sind.

Da $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ für $a \neq 0$, gilt $\operatorname{Span}(b_1, b_2, b_3) \neq W$ und somit existiert keine Basis mit genau zwei Elementen in $V^\perp$.

e) Nein: Da $\dim(W) = 3$, hat jede Basis genau 3 Elemente. Also brauchen wir 3 linear unabhängige Vektoren in $V^\perp$.

Da $\dim(V^\perp) = 2$, gibt es keine 3 linear unabhängigen Vektoren in $V^\perp$.