2. Subspaces of function spaces and $\mathbb{R}^{m\times m}$ (in-class) (★☆☆)

a) In this exercise we consider the vector space V of all real-valued functions on the interval $[0,1]$. In other words, every element $\mathbf{f} \in V$ is a function $\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ and conversely, every function $\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ is in V. Note that it might not be obvious that this is a vector space, but for the purpose of this exercise you can assume that it is. In particular, there exists a valid addition $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ of such functions $\mathbf{f} \in V$ and $\mathbf{g} \in V$, and a valid scalar multiplication $c\mathbf{f}$ for a scalar $c \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{f} \in V$ defined as follows:

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x) := \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \qquad \text{for all } \mathbf{f},\mathbf{g} \in V \text{ and } x \in [0,1]$$
$$(c\mathbf{f})(x) := c\mathbf{f}(x) \qquad \text{for all } \mathbf{f} \in V, x \in [0,1] \text{ and } c \in \mathbb{R}.$$

Prove that

$$U = \{\mathbf{f} \in V : \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(1-x) \text{ for all } x \in [0,1]\} \subseteq V$$

is a subspace of V.

b) Let $m \in \mathbb{N}^+$. Consider the set $\mathcal{D}_m$ of diagonal $m \times m$ matrices, which is a subspace of $\mathbb{R}^{m\times m}$. What is the dimension of $\mathcal{D}_m$? Justify your answer with a proof.

a) Wir müssen zeigen:

i) U ist nicht leer

ii) Wenn $f, g \in U$, dann ist $f+g \in U$

iii) Wenn $f \in U$, $c \in \mathbb{R}$, dann ist $cf \in U$.

i) Jede konstante Funktion ist in U, also z.B.

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. $f(x) = 0 = f(1-x)$.

ii) Sei $f, g \in U$ beliebig. Für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$(f+g)(x) \overset{\text{def } +}{=} f(x) + g(x) \overset{f \in U}{=} f(1-x) + g(x)$$
$$\overset{g \in U}{=} f(1-x) + g(1-x) \overset{\text{def. } +}{=} (f+g)(1-x)$$

Also ist auch $(f+g) \in U$.

iii) Sei $f \in U$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$(cf)(x) \overset{\text{def „}\cdot\text{"}}{=} c\,f(x) \overset{f \in U}{=} c\,f(1-x) \overset{\text{def. „}\cdot\text{"}}{=} (cf)(1-x)$$

Wieso kann man nach nicht hier die Definition von U anwenden?

→ f ist hier eine Funktion, nicht eine reelle Zahl. Wir wissen nicht, wie sich cf verhält.

b) Die Dimension eines Unterraums ist definiert als die Grösse einer Basis. Also suchen wir eine Basis für D_m.

Für $m = 2$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist eine Basis,

da $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

und $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ linear unabhängig.

Vermutung: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist eine Basis.

Für m beliebig: Sei $E^{(i)}$ die Matrix mit einer 1 im i-ten Diagonaleintrag und 0 überall sonst.

Wir zeigen, dass $B = \{ E^{(i)} : i \in [m] \}$ eine Basis ist für D_m.

1. Alle Elemente in B sind linear unabhängig:

   Sei $E^{(i)} \in B$. Da $E^{(i)}_{ii} = 1$ und $E^{(j)}_{ii} = 0$ für alle $j \in [m]$, $j \neq i$, kann $E^{(i)}$ nicht als Linearkombination von den $E^{(j)}$s dargestellt werden. Dies gilt für alle $i \in [m]$, also sind die Elemente von B linear unabhängig.

2. $\text{Span}(B) = D_m$

   Sei $A \in D_m$. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{mm} \end{bmatrix}$

   Man kann also schreiben: $A = \sum_{i \in [m]} a_{ii} E^{(i)}$.

   Also gilt $\text{Span}(B) = D_m$.

Die Dimension von D_m ist gegeben durch die Anzahl der Elemente einer Basis. Da $|B| = m$, ist die Dimension von D_m m.