3. Skew-symmetric matrices as a subspace (bonus, hand-in) (★★☆)

Let $m \in \mathbb{N}^+$. A matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ is skew-symmetric if and only if $A = -A^\top$. Consider the set $\mathcal{S}_m$ of skew-symmetric $m \times m$ matrices.

a) Show that $\mathcal{S}_m$ is a subspace of $\mathbb{R}^{m \times m}$.

b) What is the dimension of $\mathcal{S}_m$? Justify your answer with a proof.

Hint: You can use Assignment 2 Exercise 6b) without a proof.

a) i) S_m ist nicht leer, da die Nullmatrix schiefsymmetrisch ist, also $0 \in S_m$.

ii) Seien $A, B \in S_m$. Wir zeigen $(A+B) \in S_m$.

$$A + B \overset{A,B \in S_m}{=} -A^T - B^T$$
$$= -(A^T + B^T)$$
$$= -(A+B)^T$$

Da $A + B = -(A+B)^T$, ist $A + B \in S_m$.

iii) Sei $A \in S_m$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $\lambda A \in S_m$

$$\lambda A = \lambda(-A^T)$$
$$= -\lambda A^T$$
$$= -(\lambda A)^T$$

Da $\lambda A = -(\lambda A)^T$, ist $\lambda A \in S_m$.

Da i), ii) und iii) erfüllt sind, ist S_m ein Unterraum von $\mathbb{R}^{m \times m}$.

b) Assignment 2 Aufgabe 6 b): **b)** Let $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ m}$ be skew-symmetric. Show that $a_{ii} = 0$ for all $i \in [m]$.

Um die Dimension zu bestimmen, suchen wir eine Basis B.

Da alle Diagonalelemente 0 sind, und da $A = -A^T$,

muss jede Matrix in S_m die folgende Form haben:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} & \cdots & -a_{m1} \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

Beispiel: $m=3$ $\begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$

Mögliche Basis: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Sei $E^{(ij)}$ die Matrix mit

$$E^{(ij)}_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } l=i,\ k=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $B = \{ D^{(ij)} = E^{(ij)} - E^{(ji)} : i,j \in \{1,\dots,m\},\ i>j \}$.

Wir zeigen, dass B eine Basis ist für S_m.

i) Die Elemente von B sind linear unabhängig:

Sei $D^{(ij)} \in B$. $D^{(ij)}_{ij} = 1$, aber für jedes $D^{(kl)} \in B$, $(k,l) \neq (i,j)$ gilt $D^{(kl)}_{ij} = 0$.

Also kann man $D^{(ij)}$ nicht als Linearkombination der anderen Elemente schreiben. Da $D^{(ij)}$ beliebig war, folgt, dass B linear unabhängig ist.

ii) $\mathrm{Span}(B) = S_m$:

Sei $A \in S_m$. Es gilt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} & \cdots & -a_{m1} \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a_{21} D^{(21)} + a_{31} D^{(31)} + \dots + a_{m1} D^{m1} + a_{32} D^{32} + \dots + a_{m\,m-1} D^{m\,m-1}$$

$$= \sum_{\substack{i,j \in \{1,\dots,m\} \\ i>j}} a_{ij} D^{(ij)}$$

Also haben wir gezeigt, dass B eine Basis von S_m ist. Die Dimension ist gegeben als $|B|$.

Wir haben eine Matrix $D^{ij} \in B$ für jedes i, j so dass $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, i-1\}$. Für jede Wahl von i haben wir also $i-1$ mögliche j.

Also ist $|B| = \sum_{i=1}^{m} i-1 = \sum_{i=0}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2}$

Also ist $\dim(S_m) = \frac{m(m+1)}{2}$.

6. Union of subspaces (★★☆)

Let V be a vector space and let U and W be subspaces of V. Show that $U \cup W$ is a subspace of V if and only if $U \subseteq W$ or $W \subseteq U$.

$\Leftarrow$: Wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$, dann ist $U \cup W$ ein Unterraum von V:

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $U \subseteq W$.

Wieso geht dass?
$\hookrightarrow$ Wenn wir $W \subseteq U$ haben, dann „tauschen" wir U und W und haben, dass $U \subseteq W$.

Da $U \subseteq W$, folgt, dass $U \cup W = W$. Da W per Annahme ein Unterraum von V ist, ist $U \cup W$ ein Unterraum von V.

$\Rightarrow$: Wir nehmen an, dass $U \cup W$ ein Unterraum von V ist.

Sei $w \in W$ beliebig. Falls für alle w gilt, dass $w \in U$, dann ist $W \subseteq U$ und wir sind fertig.

Falls $W \not\subseteq U$, dann existiert ein $w \in W \setminus U$. Sei $u \in U$ beliebig.

Da $U \cup W$ ein Unterraum ist, muss $u + w \in U \cup W$.

Also ist entweder $u + w \in U$ oder $u + w \in W$.

$u + w \in U$ und $u \in U \Rightarrow (u+w) - u \in U$, was ein Widerspruch ist.

Also muss $u + w \in W$. Da $w \in W$, folgt $(u+w) - w \in W$, also ist $u \in W$.

Also muss jedes $u \in U$ auch in W sein, woraus folgt, dass $U \subseteq W$.