

2. Strictly diagonally dominant matrices (hand-in) (★★★)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ be strictly diagonally dominant, that is,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}|$$

holds for all $i \in [m]$. Prove that A is invertible.

Wir zeigen, dass $Ax \neq 0$ für alle $x \neq 0$. Aus Korollar 1.23 (ii)

folgt dann, dass die Spalten von A linear unabhängig sind.

Nach Definition 2.55 ist A dann invertierbar.

Sei $x \in \mathbb{R}^m$ mit $x \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$. Sei x_i so dass

$$|x_i| \geq |x_j| \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq m.$$

Wir betrachten nun den i -ten Eintrag von Ax und

zeigen, dass dieser nicht 0 ist.

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij} x_j}_y + \underbrace{a_{ii} x_i}_z$$

Es gilt: Dreiecksungleichung

$$|y| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij} x_j| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| |x_j|$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| |x_i| \quad (\text{da } |x_i| \geq |x_j|, j \in \{1, \dots, m\})$$

$$= |x_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}|$$

$$< |x_i| |a_{ii}| = |z| \quad (\text{da } |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}|)$$

Da $|y| < |z|$, folgt dass $y + z \neq 0$.

Also ist $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \neq 0$. Daraus folgt, dass

$Ax \neq 0$ wenn $x \neq 0$, was impliziert, dass A invertierbar ist.

6. Linear independence in \mathbb{R}^3 (★★☆)

Let $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ be three linearly independent vectors in \mathbb{R}^3 . Consider the three vectors $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ defined as

$$w_1 := v_1 + v_2, \quad w_2 := -v_1 + v_2, \quad w_3 := v_1 + v_2 + v_3.$$

Prove that w_1, w_2, w_3 are linearly independent.

Möglichkeit: Versuchen, Definition zu verwenden

Andere Möglichkeit:

Wenn wir zwei Matrizen $V, M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ haben, die invertierbar sind, dann ist $V \cdot M$ auch invertierbar (Lemma 2.59), also sind die Spalten von $V \cdot M$ linear unabhängig.

Wir wählen $V = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ und M , so dass

$$VM = W = \begin{bmatrix} | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}, \quad \text{also} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per Annahme sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, also ist V invertierbar.

Wir zeigen, dass M auch invertierbar ist.

Die Spalten von M sind linear unabhängig genau dann, wenn

Gauss-Elimination mit M funktioniert:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Also sind die Spalten von M linear unabhängig und

M ist invertierbar.

Also folgt, dass $W = VM$ invertierbar ist und daher sind

w_1, w_2, w_3 linear unabhängig.