1. Matrix multiplication with vectors and covectors (in-class) (★☆☆)

Let $n \in \mathbb{N}$. Consider $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ given by $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ and $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Compute $\mathbf{v}^\top \mathbf{w}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

b) Compute $\mathbf{v}\mathbf{w}^\top$ when $n = 4$.

c) Compute $\mathbf{w}^\top(\mathbf{v}\mathbf{w}^\top)\mathbf{v}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

a) $v^T w = \sum_{i=1}^n v_i w_i = \sum_{i=1}^n 2 i =$

Gaussche Summenformel

$2 \cdot \sum_{i=1}^n i = 2 \frac{n \cdot (n+1)}{2} = n(n+1)$

b) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad w^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$v \cdot w^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 2 & 1\cdot 2 & 1\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 2 & 2\cdot 2 & 2\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 2 & 3\cdot 2 & 3\cdot 2 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 2 & 4\cdot 2 & 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

c) Induktion ist möglich, aber mit geschicktem Umformen geht es schneller:

$w^T(v\, w^T)v = (w^T v)(w^T v)$ Assoziativität Matrixmult. (Lemma 2.42)

$= (v^T w)\,(v^T w)$ Symmetrie Skalarprodukt (Obs. 1.10)

$= (v^T w)^2$

$= (n(n+1))^2$ Wegen a)

2. Exercise 2.47 (in-class) (★☆☆)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ of rank r and $C \in \mathbb{R}^{m \times r}$ and $R' \in \mathbb{R}^{r \times n}$ be the matrices in the CR-decomposition of A as given in Theorem 2.46.

a) Suppose $r = n$. What are the matrices C and R'?

b) Suppose $r = 0$. What are the matrices C and R'?

Theorem 2.46 (CR decomposition). *Let A be an $m \times n$ matrix of rank r (Definition 2.10). Let C be the $m \times r$ submatrix of A containing the independent columns. Then there is a unique $r \times n$ matrix R' such that*

$$A = CR'.$$

a) Wir suchen C und R', so dass C alle unabhängigen Spalten von A enthält.

Alle Spalten von A sind linear unabhängig, da $r = n$.

Also ist $C = A$. Da $C \cdot R' = A$ gelten muss, ist $R' = I$. (Korollar 2.41)

b) Da $r = 0$, sind keine Spalten linear unabhängig.

Also ist $A = 0$.

Es ist also $C \in \mathbb{R}^{m \times 0}$ und deshalb auch $R' \in \mathbb{R}^{0 \times n}$.

Wir wissen, dass $C \cdot R' \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Da wir leere Matrizen miteinander multiplizieren, gilt $C \cdot R' = 0$. Nullmatrix