

3. Matrix multiplication and invertibility (hand-in) (★★☆)

Let $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ such that $BA = CA$.

- Suppose that A is invertible. Show that $B = C$.
- Is it true that $AB = AC$? Give either a proof or a counterexample.
- Suppose that $B - C$ is invertible. Show that $A = 0$.

a) Sei A^{-1} die Inverse von A .

$$BA = CA$$

$$\Rightarrow BA A^{-1} = CA A^{-1} \quad (\text{Multiplikation mit } A^{-1} \text{ von rechts})$$

$$\Rightarrow BI = CI$$

$$\Rightarrow B = C$$

b) Gegenbeispiel: $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$BA = 0 = CA \quad \text{aber:}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 = AC$$

c) $BA = CA$

$$\Rightarrow BA - CA = 0$$

$$\Rightarrow (B - C)A = 0 \quad (\text{Distributivität von Matrixmult.})$$

$$\Rightarrow (B - C)^{-1} (B - C)A = (B - C)^{-1} 0 \quad (\text{Inverse von } (B - C) \text{ von links})$$

$$\Rightarrow IA = 0 \quad (\text{Def. Inverse})$$

$$\Rightarrow A = 0$$

5. Inverses of matrix powers (★★☆)

- a) Let A be an $m \times m$ matrix with inverse A^{-1} and let $k \in \mathbb{N}^+$ be an arbitrary integer. Does A^k have an inverse and if yes, what is it?
- b) Recall the definition of a nilpotent matrix: We say that a square matrix A is nilpotent if and only if there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $A^k = 0$. Prove that a nilpotent matrix A cannot have an inverse.
- c) Let A be an $m \times m$ matrix with $A^3 = I$ and $A^4 = I$. Prove that $A = I$.
- d) Find a 2×2 matrix $A \neq I$ such that $A^k = I$ for all even k and $A^k = A$ for all odd $k \in \mathbb{N}$.
- e) Can you also find a 2×2 matrix A that, for all $k \in \mathbb{N}$, satisfies $A^k = I$ if and only if $k \equiv_4 0$ (i.e. $A^k = I$ if and only if k is a multiple of 4)?

a) Ja, $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$. Wir beweisen dies mit Induktion über k .

Base case: Für $k=1$ gilt $(A)^1 (A^{-1})^1 = A A^{-1} = I$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_+$. (IH)

Wir beweisen damit dass $(A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (A^{k+1}) (A^{-1})^{k+1} &= A^k A A^{-1} (A^{-1})^k \\ &= A^k I (A^{-1})^k \quad (\text{Def. Inverse}) \\ &= A^k (A^{-1})^k \\ &= I \quad (\text{IH}) \end{aligned}$$

Also stimmt $(A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$, und somit stimmt die Aussage für alle $k \in \mathbb{N}_+$.

b) Widerspruchsbeweis: Angenommen, A hat ein Inverses A^{-1} .

Wir verwenden, dass wenn A nilpotent, dann ist AB nilpotent für alle Matrizen B . Für $B = A^{-1}$ folgt also, dass AA^{-1} nilpotent ist. Da aber $(AA^{-1})^k = I^k \neq 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}^+$ ist dies ein Widerspruch und A hat kein Inverses.

c) Es gilt: $A^4 = I$ und $A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$

Also ist $A = I$.

d) Wir suchen eine 2×2 Matrix $A \neq I$ und $A^2 = I$.

Eine solche Matrix heißt auch selbst-invers, da $A^{-1} = A$.

Eine Lösung ist die Rotationsmatrix mit Grad $\phi = 180^\circ = \pi$.

Das ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A^2 = I$ aber $A \neq I$, also erfüllt A unsere Bedingungen.

Für k gerade gilt $A^k = (A^2)^{\frac{k}{2}} = I^{\frac{k}{2}} = I$

Für k ungerade gilt $A^k = A^{k-1} \overset{k-1 \text{ gerade}}{\downarrow} A = I A = A \neq I$

e) Idee: 90° Rotationsmatrix. Wenn wir 4-mal um 90° rotieren, rotieren wir um 360° , also passiert nichts.

Wir überprüfen diese Idee:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sei $k > 4$. Dann gilt $k = 4e + h$, $e, h \in \mathbb{N}$ und

$0 \leq h < 4$. Also gilt $A^k = (A^4)^e A^h = A^h$

Also ist $A^k = I$ gdw. $h = 0 \Leftrightarrow k \equiv_4 0$.

6. Inverse of triangular matrices (★★★)

- a) Find the inverse of the 2×2 matrix $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ where $a \in \mathbb{R}$.
- b) Prove that a square lower triangular matrix is invertible if and only if all its diagonal entries are non-zero.
- c) Prove that the inverse of any lower triangular matrix, if it exists, is lower triangular itself.
- d) Are the statements of b) and c) also true if we replace *lower triangular* by *upper triangular*?

a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (if $ad-bc \neq 0$).

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 0 \cdot a} \begin{bmatrix} 1 & -0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

b) \Rightarrow Sei L eine untere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen nicht 0. Wir zeigen L ist invertierbar.

Seien v_1, v_2, \dots, v_n die Spalten von L . Es reicht

zu zeigen, dass v_1, v_2, \dots, v_n linear unabhängig sind.

Wir überprüfen von rechts nach links:

v_n ist nicht 0, also linear unabhängig.

v_i ist nicht linear abhängig von $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$,
($0 \leq i < n$)

da der i -te Eintrag von $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ immer 0 ist, aber bei v_i nicht. Also ist v_i linear unabhängig.

Da diese Argumentation für alle $i < n$ funktioniert, ist L invertierbar.

\Leftarrow Komplizierteste Mustertlösung, einfachere Option:

Laut Theorem 3.7 gilt: Gauss-Elimination funktioniert

$\Leftrightarrow A$ ist linear unabhängig. $\Leftrightarrow A$ invertierbar

Wenn Gauss-Elimination funktioniert, bedeutet das, dass

$Ax=b$ für alle b eine Lösung hat.

Wir beweisen jetzt mit Induktion, dass $a_{ii} \neq 0$.

B.C: Reihe 1 ist $a_{11} x_1 = b_1$. Da dies lösbar sein muss für jedes b_1 , muss $a_{11} \neq 0$.

Induktionsschritt: Angenommen, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{k-1, k-1} \neq 0$. (I.H.)

$a_{11}, \dots, a_{k-1, k-1}$ sind fix bestimmt durch die ersten $k-1$

Reihen. Die k -te Reihe ist:

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kk} x_k = b_k$$

Da $a_{11}, \dots, a_{k-1, k-1}$ bereits fix sind, muss $a_{kk} \neq 0$.

Also sind die Diagonaleinträge alle nicht 0.