1. Linear functional (in-class) (★☆☆)

a) Let $n \in \mathbb{N}^+$. Consider the function $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined by

$$T : \mathbf{x} \mapsto \sum_{k=1}^{n} k x_k$$

for all $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$. Prove that T is a linear functional.

b) Let $n \in \mathbb{N}^+$ with $n \geq 2$ be arbitrary. Consider the function $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined by

$$T : \mathbf{x} \mapsto \sum_{k=1}^{n} (x_k)^k$$

for all $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$. Is T a linear functional?

a) T ist eine lineare Funktion genau dann, wenn $T(x+y) = T(x) + T(y)$ und

$T(\lambda x) = \lambda T(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir schauen, ob das stimmt: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$T(x+y) = \sum_{k=1}^{n} k(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} (k x_k + k y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k x_k + \sum_{k=1}^{n} k y_k = T(x) + T(y)$$

und

$$T(\lambda x) = \sum_{k=1}^{n} k(\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k x_k = \lambda T(x)$$

Also ist T eine lineare Funktion.

b) Verschiedene Strategien möglich, z.B.:

1. Beweis wie in a) versuchen und schauen, ob der Beweis funktioniert
2. Versuchen, Gegenbeispiel zu finden

Wir machen 2:

Gegenbeispiel: $x = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$.

$$T(2 \cdot e_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(2^k \cdot (e_n)_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (2^k \cdot 0) + 2^n = 2^n$$

$$2 \cdot T(e_n) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (e_n)_k^k = 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} 0^k + 1^k\right) = 2$$

Da $n \geq 2$, ist $T(2 \cdot e_n) \neq 2\,T(e_n)$.

Also ist T für kein n eine Lineartransformation.