2. Nullspace as a hyperplane (hand-in) (★★☆) aber z.B. $\lambda_1 = 0$ kann sein!

Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ and $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ not all zero. Consider the $m \times n$ matrix A of the form

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 \mathbf{v} & \lambda_2 \mathbf{v} & \cdots & \lambda_n \mathbf{v} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

a) What is the rank of the matrix A?

b) Prove that the nullspace $\mathbf{N}(A)$ is a hyperplane through the origin.

a) rank(A) = Anzahl linear unabhängiger Spalten

Eine Spalte ist linear unabhängig, wenn sie nicht eine Linearkombination der vorherigen Spalten ist. ↗ Skript S. 52

Die einzige linear unabhängige Spalte ist die erste mit $\lambda_i \neq 0$. Die vorherigen Spalten sind alle 0, und alle folgenden Spalten $\lambda_j v$ mit $j > i$ kann man wie folgt schreiben:

$$\lambda_j v = \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) \cdot \lambda_i v.$$

Also ist rank$(A) = 1$.

b) Es gilt $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Wir suchen $d \in \mathbb{R}^n$, $H_d = \{x \in \mathbb{R}^n : d^T x = 0\}$ so dass $N(A) = H_d$.

$N(A) \subseteq H_d$: Sei $x \in N(A)$. Es gilt:

$$Ax = \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v & \cdots & \lambda_n v \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 x_1 + \lambda_2 v_1 x_2 + \dots + \lambda_n v_1 x_n \\ \lambda_1 v_2 x_1 + \lambda_2 v_2 x_2 + \dots + \lambda_n v_2 x_n \\ \vdots \\ \lambda_1 v_n x_1 + \lambda_2 v_n x_2 + \dots + \lambda_n v_n x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 \cdot (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \\ v_2 \cdot (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \\ \vdots \\ v_n \cdot (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

mindestens ein $v_i \neq 0$

Da $\vec{v} \neq 0$, muss $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$.

Also ist für $d = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ $d \cdot x = 0$ und $N(A) \subseteq H_d$.

$H_d \subseteq N(A)$: Sei $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : d^T x = 0\}$, $d = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

$d^T x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Daraus folgt:

$$Ax = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_1 \\ \vdots & \ddots & \\ \lambda_1 v_m & \cdots & \lambda_n v_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \\ \vdots \\ v_m \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{pmatrix} = 0$$

Also ist $x \in N(A)$.

6. **Skew-symmetric matrices** (★★☆)

A square matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ is skew-symmetric if and only if $A^\top = -A$.

a) Give an example of a nonzero skew-symmetric matrix when $m = 2$.

b) Let $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ m}$ be skew-symmetric. Show that $a_{ii} = 0$ for all $i \in [m]$.

c) Which matrices in $\mathbb{R}^{m\times m}$ are both skew-symmetric and symmetric? Argue why your list is complete.

d) Let $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ be skew-symmetric. Show that $\operatorname{rank}(A) \leq 2$.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Wenn A schiefsymmetrisch ist, gilt:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = -A$$

Also muss $a_{11} = a_{22} = 0$ und $a_{12} = -a_{21}$.

Ein Beispiel wäre also $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Da $A^T = -A$, muss gelten, dass $a_{ii} = -a_{ii}$, $i \in [m]$.

$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$

c) Symmetrisch: $A^T = A$

Schiefsymmetrisch: $A^T = -A$

$A^T = A$ und $A^T = -A$

$\Rightarrow A = -A$

$\Rightarrow 2A = 0$

$\Rightarrow A = 0$

Also ist nur die Nullmatrix symmetrisch und schiefsymmetrisch.

d) Observation 2.5 (ii): Die Spalten von A sind linear unabhängig genau dann, wenn $x = 0$ der einzige Vektor ist, so dass $Ax = 0$.

Wenn wir also ein $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$ finden, so dass $Ax = 0$, dann sind die Spalten von A nicht linear unabhängig und $\operatorname{rank}(A) \leq 2$.

Aus b) und $A^T = -A$ folgt, dass

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ -a_{12} x_1 + a_{23} x_3 \\ -a_{13} x_1 - a_{23} x_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} a_{23} \\ -a_{13} \\ a_{12} \end{pmatrix}$$

Da $Ax = 0$, muss $\operatorname{rank}(A) \leq 2$.

4. Scalar product (★★☆)

Recall that the scalar product of two vectors

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^n$ is a real number given by

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

for the covector $\mathbf{v}^\top \in (\mathbb{R}^n)^*$. The vectors $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ are orthogonal to each other if and only if $\mathbf{v}^\top \mathbf{w} = 0$.

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ be the matrix

$$A = \begin{bmatrix} — & \mathbf{u}_1^\top & — \\ — & \mathbf{u}_2^\top & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{u}_m^\top & — \end{bmatrix}$$

with rows $\mathbf{u}_1^\top, \mathbf{u}_2^\top, \ldots, \mathbf{u}_m^\top \in (\mathbb{R}^n)^*$. Recall that, by Observation 2.8, we have

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} — & \mathbf{u}_1^\top & — \\ — & \mathbf{u}_2^\top & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{u}_m^\top & — \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_2^\top \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^\top \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. In particular, we have $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ if and only if $\mathbf{x}$ is orthogonal to each of $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$.

a) Now consider two vectors $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ satisfying $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ and $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ and let $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ be arbitrary. Prove that the vector $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ is orthogonal to each of $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$.

Nullraum

b) Finally, consider the set of vectors $\mathcal{L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ and assume $|\mathcal{L}| \geq 2$. Is $\mathcal{L}$ a finite set?

a) Wir zeigen: Wenn v orthogonal zu x und y, dann ist v orthogonal zu $\lambda x + \mu y$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. * Hint

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ so dass $v^T x = 0$, $v^T y = 0$.

Nach Observation 1.10 gilt:

$$v^T(\lambda x + \mu y) = \lambda v^T x + \mu v^T y = 0$$

Also stimmt *.

Wir betrachten nun eine Zeile u_i von A.

Da $Ax = 0$ und $Ay = 0$, ist u_i orthogonal zu x und y.

Also muss u_i orthogonal zu $\lambda x + \mu y$ sein, also ist $A(\lambda x + \mu y) = 0$.

Da $\mathcal{L} = N(A)$, ist ein Element immer 0!

b) Da $\mathcal{L} \geq 2$, gibt es mindestens ein $x \in \mathcal{L}$, $x = 0$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen a) gilt $A(\lambda x) = 0$.

Also ist $\lambda x \in \mathcal{L}$. Für jedes λ erhalten wir

einen anderen Vektor, der in $\mathcal{L}$ ist.

Also ist $\mathcal{L}$ nicht endlich.