$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ↙ Erklären, dass man so Gleichheit zweier Mengen zeigt

Def. Linie durch den Ursprung: $L = \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $w \in \mathbb{R}^m$, $w \neq 0$

Sei L eine Linie durch den Ursprung, sei $u \in L$, $u \neq 0$, $L_u := \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Zu zeigen: $L = L_u$

$L \subseteq L_u$

Sei $v \in L$ beliebig. Also $v = \lambda_v w$.

Wieso $\lambda_u \neq 0$?

Da $u \in L$: $u = \lambda_u w$, $\lambda_u \neq 0 \Rightarrow w = \frac{1}{\lambda_u} u$

Also können wir $v = \frac{\lambda_v}{\lambda_u} u$ schreiben.

$L_u \subseteq L$

Sei $v' \in L_u$ beliebig.

$v' = \lambda u = \lambda \cdot \lambda_u v = (\lambda \cdot \lambda_u) v$

Also ist $v' \in L$.

Da $L \subseteq L_u$ und $L_u \subseteq L$, ist $\{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} = L$

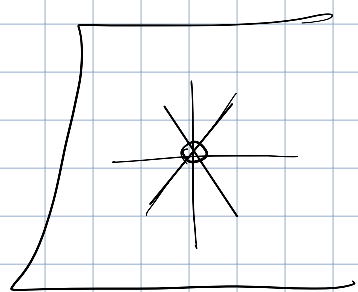
b) Seien L_1, L_2 Linien durch den Ursprung in $\mathbb{R}^m$.

Sei $L_1 = \{\lambda w_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{\lambda v_2 : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Zeige: Es gilt entweder $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ oder $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$.

1. $\{0\} \in L_1 \cap L_2$, da $0 = 0 w_1 = 0 w_2$

2. Falls $L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$, dann existiert



ein Vektor $u \neq 0$, $u \in L_1 \cap L_2$

Da $u \in L_1$, folgt aus a), dass $L_1 = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Analog folgt aus $u \in L_2$, dass $L_2 = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Also ist $L_1 = L_2$.

Aus 1. und 2. folgt, dass entweder $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ oder $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$

Def. Hyperebene: $H_d = \{ v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot d = 0 \}$, $d \in \mathbb{R}^2$, $d \neq 0$ „Menge aller Vektoren, die durch 0 gehen & senkrecht zu einem Vektor d sind"

c) Sei $L = \{ \lambda w : \lambda \in \mathbb{R} \}$ mit $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. eine Linie durch den Ursprung in $\mathbb{R}^2$.

Zeige, dass L eine Hyperebene ist.

Wir suchen $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, so dass $L = \{ v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot d = 0 \}$

Insbesondere soll $w \cdot d = w_1 d_1 + w_2 d_2 = 0$. Wieso? Damit $L =$ muss $v \in$

$d_1 = -w_2$, $d_2 = w_1$ ist eine Lösung für $w \cdot d = 0$ Vermutung, aber stimmt es wirklich?

Sei $H_d := \{ v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = 0 \}$

$L \subseteq H_d$: Ist für $d = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$ $L = \{ v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot d = 0 \}$?

Sei $u \in L$ beliebig. $u = \lambda_u w$.

$$u \cdot d = (\lambda_u w) \cdot d = \lambda_u w_1 d_1 + \lambda_u w_2 d_2 = \lambda_u (w_1 d_1 + w_2 d_2) = 0$$

Also $u \in H_d$

$H_d \subseteq L$

Sei $v \in H_d \Rightarrow v \cdot d = v_1 d_1 + v_2 d_2 = -v_1 w_2 + v_2 w_1 = 0$

Wir suchen λ so dass $v = \lambda w$.

$(w_1 \neq 0)$: $v_2 = \frac{v_1 w_2}{w_1} = \frac{v_1}{w_1} w_2$, also $\lambda = \frac{v_1}{w_1}$ $\left(v = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{w_1} \cdot w_1 \\ \frac{v_1}{w_1} \cdot w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{v_1}{w_1} \cdot w_2 \end{pmatrix} \right)$

$$-v_1 w_2 + v_2 w_1 = -v_1 w_2 + \frac{v_1}{w_1} \cdot w_2 \cdot w_1 = -v_1 w_2 + v_1 w_2 = 0$$

ihr könnts selbst überprüfen Gibts ein Problem?

$(w_2 \neq 0)$: $v_1 = \frac{v_2 v_1}{w_2} = \frac{v_2}{w_2} w_1$, also $\lambda = \frac{v_2}{w_2}$ → Ja, was wenn $w_1 = 0$?

Was wenn $w_1 = 0$ & $w_2 = 0$?

↳ kann nicht sein!

Also ist $\{ v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot d = 0 \} = L$