2. Orthogonality and Linear independence (hand-in) (★☆☆)

a) For which number $s \in \mathbb{R}$ are the two following vectors orthogonal?

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} s \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$$

b) For which number $t \in \mathbb{R}$ are the three following vectors linearly dependent?

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Show that if two nonzero vectors $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ are orthogonal, then they are linearly independent. Prove that the converse is not necessarily true, i.e. provide an example of two linearly independent vectors that are not orthogonal.

a) v und w orthogonal $\Leftrightarrow$ $0 \overset{!}{=} v \cdot w$

$v \cdot w = s \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot s = 3s + 6 \Rightarrow \underline{\underline{s = -2}}$

b) Für welches t sind $u = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

welcher ist beliebig! trivial erlaubt!

Eines der Vektoren ist eine Linearkombination der vorherigen. Reihenfolge: v, w, u.

$v \neq 0$ und w ist keine Linearkombination von v.

Wir suchen also t, so dass $u = \lambda v + \mu w$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda u + \mu v = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ \lambda + \mu \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mu = t, \quad \lambda = t, \quad \lambda + \mu = 2t = 0 \Rightarrow \underline{t = 0}$

Indirekter Beweis!

c) (orthogonal $\Rightarrow$ linear unabhängig) $\Leftrightarrow$ (linear abhängig $\Rightarrow$ nicht orthogonal)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v, w \neq 0$ linear abhängig.

Lemma 1.22

Da v, w linear abhängig, ist einer davon eine Linearkombination der vorherigen. Da $v \neq 0$, ist v keine Linearkombination von $\{\}$. Also muss w eine Linearkombination von v sein, also $w = \lambda \cdot v$. Da $w \neq 0$, muss $\lambda \neq 0$.

Also gilt $v \cdot w = \lambda w \cdot w = \lambda \cdot \|w\|^2$. Da $\lambda \neq 0$ und

Wieso? $\rightarrow$ Positiv definit und $w \neq 0$.

$\|w\| > 0$, ist $v \cdot w \neq 0$. Also sind v, w nicht orthogonal.

linear unabhängig $\not\Rightarrow$ orthogonal

z. B. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. v und w sind linear unabhängig, aber $v \cdot w = 1$.

$v \neq 0$, w nicht $\lambda \cdot v$

4. Linear independence (★★☆)

Let $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \in \mathbb{R}^m$ be the standard unit vectors in $\mathbb{R}^m$. Consider the vectors $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m$ with $\mathbf{v}_i := \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}$ for all $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ and $\mathbf{v}_m := \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_1$.

For example, we get

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

in the case $m = 3$, and

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

in the case $m = 4$. → Idee: $v_1 + v_3 - v_2 \approx v_4$

a) Prove that $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ are linearly dependent if m is even. ↘ alle ungeraden Vektoren − alle geraden Vektoren $= 0$

b) Prove that $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ are linearly independent if m is odd.

a) Wir betrachten $\underbrace{\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} v_{2i-1}}_{\text{ungerade Vektoren}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} v_{2i}}_{\text{gerade Vektoren ohne } v_m}$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} (e_{2i-1} + e_{2i}) - \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} (e_{2i} + e_{2i+1})$$

$$= (e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_m) - (e_2 + e_3 + e_4 + \ldots + e_{m-1})$$

$$= e_1 + e_m = v_m$$

Also sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, da man

$v_m = v_1 - v_2 + v_3 - \ldots + v_{m-1}$ schreiben kann.

b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ so dass $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.

In dem i-ten ($i \in \{2, \ldots, m\}$) Eintrag sind nur v_i und v_{i-1} nicht 0.

Im 1. Eintrag sind nur v_1, v_m nicht null.

Da jeder nicht-null Eintrag 1 ist, muss also $\lambda_i = -\lambda_{i-1}$

für alle $i \in \{2, \ldots, m\}$ und $\lambda_1 = -\lambda_m$. Also erhalten wir:

$$\lambda_1 = (-1) \cdot \lambda_2 = (-1)^2 \lambda_3 = \ldots = (-1)^{m-1} \lambda_m = (-1)^m \lambda_1$$

Also muss $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Also ist die einzige Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_m$, die 0 ergibt, die triviale. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

5. Angle between two vectors (★★★)

Consider two non-zero vectors $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ and $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ with $x + y + z = 0$. Determine the value of $\cos(\alpha)$ where α denotes the angle between the two vectors $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$. You are not required to compute (or look up) α, but you are of course welcome to do so.

Wir wissen $\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}$

Es gilt $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = \|w\|$

Also gilt $\|v\| \cdot \|w\| = x^2 + y^2 + z^2$, und

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \frac{xz + yx + zy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Idee: können wir $xz + yx + zy$ umschreiben?

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2zy$$

$$\Rightarrow xz + yz + zy = \frac{1}{2}(x + y + z)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Also ist

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \frac{xz + yx + zy}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{1}{2}$$

Also ist $\alpha = \cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi = 120°$